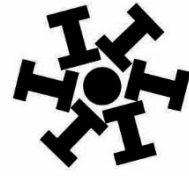




MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACIÓN
Universidad Nacional de San Juan



FACULTAD DE INGENIERÍA

Departamento de Matemática

Cátedra: CÁLCULO I – ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Autoría: Equipo de cátedra - 2021

GUÍA DE EJERCICIOS TEMA 6

INTEGRALES DEFINIDAS, INTEGRALES IMPROPIAS Y APLICACIONES DE LA INTEGRAL

1. Propiedades de las integrales definidas

1.1. Use propiedades de la integral definida para proporcionar expresiones equivalentes.

Solo si es evidente indique el resultado numérico que se obtendrá.

a)	$\int_0^{\pi} \sin x \, dx + \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} \sin x \, dx =$	
b)	$\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{1 - 2^x}{x} \, dx =$	
c)	$\int_0^{\pi} (\cotg x + x^{\sin x}) \, dx =$	
d)	si $\int_a^b e^{x^2} \, dx = 0$, entonces se puede afirmar:	
e)	$\int_{-3}^0 e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx + \int_0^3 e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx =$	

2. Aplicación de la Regla de BARROW

2.1. $\int_1^2 x \cdot \ln x dx$

La solución de este primer ejercicio se dividirá en dos pasos: primero hay que calcular una primitiva tal que $F'(x) = x \ln x$:

$$\begin{aligned} \int x \ln x dx &= \longrightarrow \begin{array}{ll} u = \ln x & du = \frac{dx}{x} \\ dv = x dx & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \\ &= \ln x \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} \\ &= \ln x \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int x dx \\ &= \ln x \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} = F(x) \end{aligned}$$

Segundo, se aplica la regla de Barrow:

$$\begin{aligned} \int_1^2 x \ln x dx &= F(x)|_1^2 = F(2) - F(1) \\ \int_1^2 x \ln x dx &= \left[\ln x \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} \right]_1^2 \\ \int_1^2 x \ln x dx &= \left[\left(\ln(2) \frac{2^2}{2} - \frac{2^2}{4} \right) - \left(\ln(1) \frac{1^2}{2} - \frac{1^2}{4} \right) \right] \\ &= \left[(2 \ln(2) - 1) - \left(0 - \frac{1}{4} \right) \right] \\ &\approx \boxed{0,63} \end{aligned}$$

2.2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot e^{\sin x} dx$

Esta integral se resolverá por sustitución, Los límites de integración de la integral DEFINIDA están expresados en función de la variable original, por lo tanto, es necesario cambiarlos a la nueva variable en función de la sustitución planteada. Esto se debe hacer SIEMPRE QUE SE RESUELVA UNA INTEGRAL DEFINIDA POR SUSTITUCIÓN:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot e^{\sin x} dx \longrightarrow \text{Sustitución: } \begin{cases} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \\ dx = \frac{dt}{\cos x} \end{cases}$$

NUEVOS LÍMITES:

$$\text{si } x = 0 \quad \text{entonces } \rightarrow \quad t = \sin 0 = 0$$

$$\text{si } x = \frac{\pi}{2} \quad \text{entonces } \rightarrow \quad t = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot e^{\sin x} dx &= \int_0^1 \cancel{\cos x} \cdot e^t \frac{dt}{\cancel{\cos x}} \\ &= \int_0^1 e^t dt = e^t \Big|_0^1 = \boxed{e - 1} \end{aligned}$$

Ejercicios propuestos:

$$2.3. \int_0^1 x^2 (x^3 + 1) dx$$

$$\text{Sol: } I = \frac{1}{2}$$

$$2.4. \int_{\pi}^{2\pi} \cos^2 x \, dx$$

$$\text{Sol: } I = \frac{\pi}{2}$$

$$2.5. \int_2^4 \frac{1}{25+x^2} dx$$

$$\text{Sol: } I \approx 0,05$$

$$2.6. \int_0^{\pi} x \cdot \cos x \, dx$$

$$\text{Sol: } I = -2$$

3. Integrales impropias de funciones con discontinuidades infinitas

$$3.1. \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4-x}} dx$$

Sol: La función integrando es discontinua en $x=4$, por lo que para resolver la integral se aplica límite con variable que tiende a 4 por izquierda por ser el límite superior de la integral:

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4-x}} dx &= \lim_{b \rightarrow 4^-} \int_0^b \frac{1}{\sqrt{4-x}} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow 4^-} \int_0^b (4-x)^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow 4^-} \left. \frac{(4-x)^{\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right|_0^b = \lim_{b \rightarrow 4^-} \left(-\frac{1}{\frac{1}{2}} \right) (4-x)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^b \\ &= -2 \lim_{b \rightarrow 4^-} (4-x)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4-x}} dx &= -2 \lim_{b \rightarrow 4^-} \left[(4-b)^{\frac{1}{2}} - (4-0)^{\frac{1}{2}} \right] \\
 &= -2 \left[\lim_{b \rightarrow 4^-} (4-b)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{4} \right] = -2[0 - \sqrt{4}] \\
 &= -2[-2] = \boxed{4}
 \end{aligned}$$

3.2. $\int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$

Sol: La función integrando es discontinua en $x=\pm 2$, por lo que para resolver la integral se tiene que descomponer en dos integrales usando propiedades (la misma que en el apartado “e” del ejercicio 1).

En este caso se eligió $x=0$, ya que se simplifican los cálculos, sin embargo, se puede elegir cualquier otra abscisa i .

$$\int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int_{-2}^0 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx + \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

Se ha dividido la primera integral en dos, ahora resta resolver cada una aplicando límite con variable que tiende a cada uno de los límites que son discontinuidades en la función integrando, por izquierda y por derecha según corresponda:

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{a \rightarrow -2^+} \int_a^0 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx + \lim_{b \rightarrow 2^-} \int_0^b \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \\
 &= \lim_{a \rightarrow -2^+} \int_a^0 \frac{1}{\sqrt{4} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}} dx + \lim_{b \rightarrow 2^-} \int_0^b \frac{1}{\sqrt{4} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}} dx \\
 &= \lim_{a \rightarrow -2^+} \int_a^0 \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}} dx + \lim_{b \rightarrow 2^-} \int_0^b \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}} dx \\
 &= \lim_{a \rightarrow -2^+} \arcsen \left(\frac{x}{2} \right) \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow 2^-} \arcsen \left(\frac{x}{2} \right) \Big|_0^b \\
 &= \arcsen 0 - \lim_{a \rightarrow -2^+} \arcsen \left(\frac{a}{2} \right) + \lim_{b \rightarrow 2^-} \arcsen \left(\frac{b}{2} \right) - \arcsen 0 \\
 &= - \left(-\frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{2} = \boxed{\pi}
 \end{aligned}$$

Ejercicios propuestos:

$$3.3. \int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{8-x}} dx$$

$$3.4. \int_4^6 \frac{1}{4-x} dx$$

$$3.5. \int_0^4 \frac{1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}} dx$$

4. Integrales impropias con intervalos de integración infinito

Los intervalos de integración infinitos deben trabajarse tomando límite de una variable adecuada tendiendo a infinito. Esto es así ya que el intervalo de integración debe ser cerrado. Hay que tener en cuenta, además, que en muchos casos se llega a límites indeterminados y es necesario salvar dicha indeterminación con los métodos estudiados desde la unidad 2.

$$4.1. \int_{-\infty}^0 e^{-2x} dx$$

Sol: Ya que el intervalo de integración es $(-\infty, 0]$, se aplica límite para la variable “a” tendiendo a infinito negativo, y se considera el nuevo intervalo de integración como $[a, 0]$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 e^{-2x} dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^{-2x} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2} \int_a^0 (-2) e^{-2x} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2} e^{-2x} \Big|_a^0 \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow -\infty} [e^0 - e^{-2a}] \\ &= -\frac{1}{2} \left[1 - \lim_{a \rightarrow -\infty} e^{-2a} \right] \rightarrow \boxed{\infty} \end{aligned}$$

Conclusión: La integral diverge. ☹

$$4.2. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

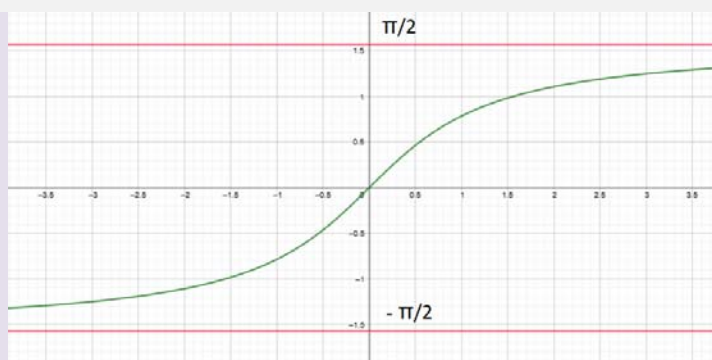
Sol: Ya que el intervalo de integración debería ser $(-\infty, \infty)$, entonces, como los dos extremos del intervalo son infinitos, para resolver la integral se sugiere descomponer en dos integrales usando propiedades (la misma que en el apartado “e” del ejercicio 1).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

De la misma forma que en ejercicio resuelto 3.2, se ha descompuesto la integral original usando un punto medio. Ahora se toma límite en cada integral considerando los intervalos de integración $[a, 0]$ y $[0, b]$ respectivamente:

$$\begin{aligned} &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctg x \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow \infty} \arctg x \Big|_0^b \end{aligned}$$

**PARA TENER
EN CUENTA:** La
gráfica de la
función arco
tangente:



$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} [\arctg 0 - \arctg a] + \lim_{b \rightarrow \infty} [\arctg b - \arctg 0]$$

$$= \left[0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] + \left[\frac{\pi}{2} - 0 \right] = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \boxed{\pi}$$

Conclusión: La integral converge. 😊

Ejercicios propuestos:

4.3. $\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^3} dx$

4.4. $\int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2) dx$

4.5. $\int_0^{\infty} x \cdot e^{-x} dx$

4.6. $\int_2^{\infty} \frac{3}{x \cdot \ln x} dx$

Banco de ejercicios integradores de Primer Nivel de Dificultad:

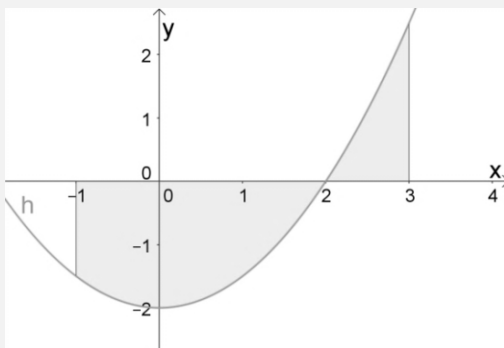
Grafique en GeoGebra cada una de las siguientes funciones para clasificar cada una de las integrales como: **1- integral definida**, **2-integral impropia discontinua**, o **3- integral impropia de intervalo infinito**. En función de esta clasificación, siga los pasos adecuados para resolverla, y si corresponde, concluya sobre la convergencia de la misma.

- | | | |
|---|--|--|
| 1. $\int_1^3 \sqrt{1+3x} \, dx$ | 2. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x \, dx$ | 3. $\int_0^2 (2-3x) \, dx$ |
| 4. $\int_4^\infty \frac{x}{\sqrt{x^2+15}} \, dx$ | 5. $\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \frac{1}{1+x^2} \, dx$ | 6. $\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} \, dx$ |
| 7. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$ | 8. $\int_0^{10} e^{-5x} \, dx$ | 9. $\int_0^\pi \operatorname{sen} x \cdot \cos x \, dx$ |
| 10. $\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi x^2 \cdot \operatorname{sen} x \, dx$ | 11. $\int_0^\infty \frac{1}{x+1} \, dx$ | 12. $\int_0^1 \frac{x}{x-1} \, dx$ |

5. Área bajo curvas planas en coordenadas cartesianas

5.1. Plantee una integral definida para el cálculo del área bajo la curva que indica la gráfica:

5.1.1. $h(x) = \frac{x^2}{2} - 2$



Sol: De la gráfica se puede observar que la región cerrada del plano a la que se le quiere calcular el área está dividida en dos: una por debajo del eje x y otra por arriba.

Dado que los valores de las ordenadas que se encuentran por debajo del eje x son negativos, el resultado de la integral definida será negativo también.

Entonces para que la integral definida represente el área hay que dividir el

intervalo de integración original en dos: $[-1,2]$ y $[2,3]$. En el primer intervalo además hay que hacer algún artificio matemático para convertir el resultado de la integral (que será negativo) en el valor del área. Para eso se puede tomar valor absoluto, agregar un signo menos o invertir los límites usando propiedades de la integral definida. Al área del primer recinto le llamaremos “área 1” en el intervalo $[-1,2]$, de la

misma forma a la del segundo recinto, le llamaremos “área 2” en el intervalo $[2,3]$:

$$A_1 = \left| \int_{-1}^2 \left(\frac{x^2}{2} - 2 \right) dx \right|$$

PARA TENER EN CUENTA:

$$A_1^* = - \int_{-1}^2 \left(\frac{x^2}{2} - 2 \right) dx$$

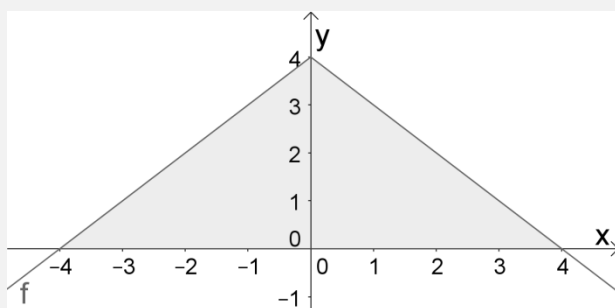
$$A_1^* = \int_2^{-1} \left(\frac{x^2}{2} - 2 \right) dx$$

(*) son expresiones equivalentes.

$$A_2 = \int_2^3 \left(\frac{x^2}{2} - 2 \right) dx$$

$$A_{Total} = A_1 + A_2 = \int_2^{-1} \left(\frac{x^2}{2} - 2 \right) dx + \int_2^3 \left(\frac{x^2}{2} - 2 \right) dx$$

5.1.2. $f(x) = 4 - |x|$



Sol: De la gráfica se puede observar que en $x=0$ la función no es integrable ya que la misma no es derivable.

Por otra parte, también se observa que la función, es simétrica de simetría par, y las dos regiones que quedan divididas por el eje y tienen el mismo valor de área.

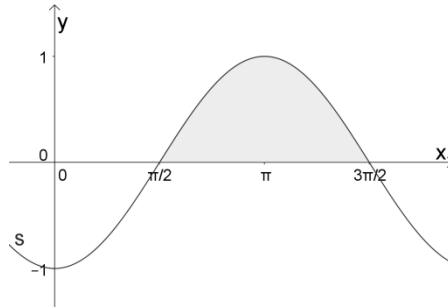
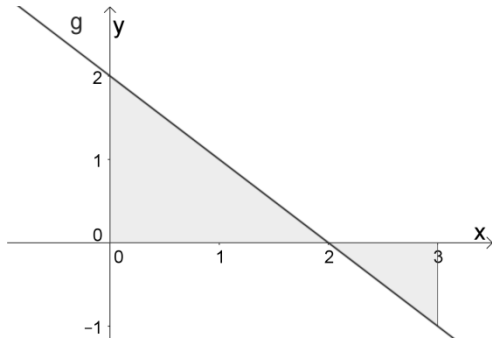
Finalmente, para poder calcular el área, se puede usar la función $g(x) = 4 - x$ e integrar en el intervalo $[0,4]$ y multiplicar este resultado por dos aprovechando la simetría de la función original:

$$A = 2 \int_0^4 (4 - x) dx$$

Ejercicios propuestos:

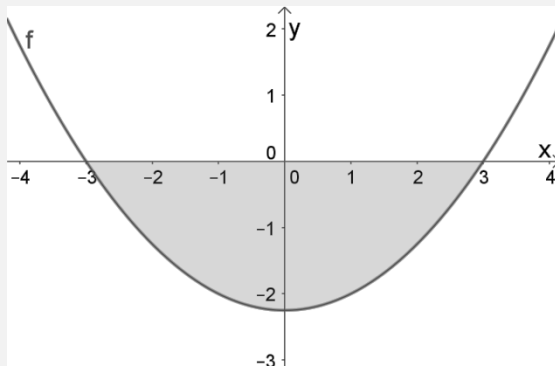
5.1.3. $g(x) = 2 - x$

5.1.4. $s(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$



5.1.5. Plantee una integral distinta a la propuesta en el ejercicio 5.1.2 para obtener el valor del área indicada, además ¿es posible corroborar de otro modo que el valor hallado es el correcto?

5.2. Halle el valor del área de la región limitada por la curva plana de la función $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{9}{4}$ y el eje x .



Sol: El primer paso consiste en determinar la región del plano a la que se le debe calcular el área. Para eso se realiza la gráfica de la función en GeoGebra. La región delimitada por la curva y el eje x está sombreada en gris.

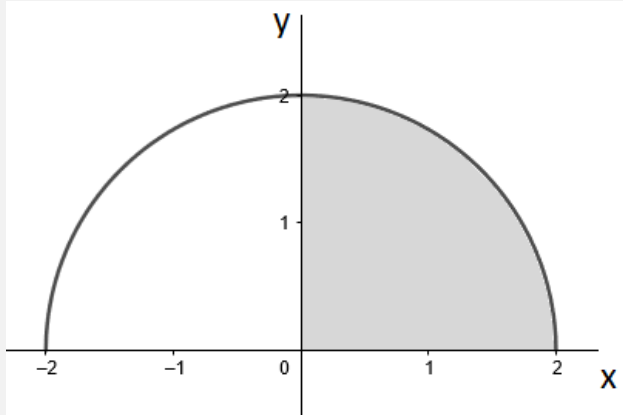
La misma comienza y termina en las intersecciones entre la curva y el eje x , y son:

$$f(x) = 0 \rightarrow x_{1-2} = \pm 3$$

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-3}^3 \left(\frac{x^2}{4} - \frac{9}{4} \right) dx \right| = \left| \int_{-3}^3 \frac{x^2}{4} dx - \int_{-3}^3 \frac{9}{4} dx \right| \\ &= \left| \left[\frac{1}{4} \frac{x^3}{3} \right]_{-3}^3 - \left[\frac{9}{4} x \right]_{-3}^3 \right| \\ &= \left| \frac{1}{4} \left(\frac{3^3}{3} - \frac{(-3)^3}{3} \right) - \left(\frac{9}{4} (3 - (-3)) \right) \right| \\ &= \boxed{9 u^2} \end{aligned}$$

5.3. Halle el valor del área encerrada por $\frac{1}{4}$ de circunferencia de radio $r = 2$

PARA TENER EN CUENTA: La ecuación general de segundo grado estudiada en geometría analítica, para una circunferencia de radio r centrada en el origen de los ejes cartesianos está dada por la función $x^2 + y^2 = r^2 \rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}$



Sol: El primer paso consiste en determinar la región del plano a la que se le debe calcular el área. Para eso se realiza la gráfica de la función en GeoGebra. La región delimitada por la curva y el eje x está sombreada en gris.

La misma comienza en $x=0$ y termina en la intersección entre la circunferencia de radio 2 y el eje x en $x=2$.

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2} ; I = [0, 2]$$

$$A = \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx \quad \xrightarrow{\text{Sustitución}} \begin{cases} x = 2 \operatorname{sen} t \\ t = \operatorname{arcsen} \frac{x}{2} \\ dx = 2 \cos t dt \end{cases}$$

NUEVOS LÍMITES:

$$\text{si } x = 0 \text{ entonces } \rightarrow t = \operatorname{arcsen} 0 = 0$$

$$\text{si } x = 2 \text{ entonces } \rightarrow t = \operatorname{arcsen} \frac{2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

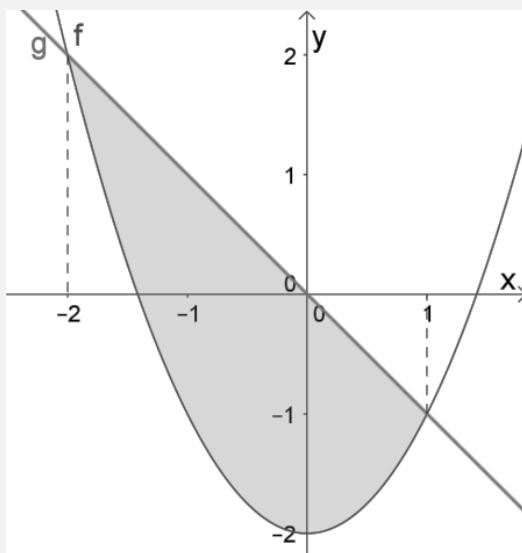
$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - (2 \operatorname{sen} t)^2} 2 \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - 4 \operatorname{sen}^2 t} 2 \cos t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4(1 - \operatorname{sen}^2 t)} 2 \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} 2 \cos t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4} \cos t 2 \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^2 t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt = 2 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \operatorname{sen} 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \pi + (\operatorname{sen} \pi - \operatorname{sen} 0) \\ &= \boxed{\pi u^2} \end{aligned}$$

Ejercicios propuestos:

- 5.4. Detalle qué cambios debería realizar en el planteo y resolución del ejercicio anterior para calcular el área de $\frac{1}{2}$ circunferencia.
- 5.5. Halle el valor del área bajo la curva de la función $f(x) = x^3$ en el intervalo $[-1 ; 1]$.
- 5.6. Determine cuál es el valor del área limitada por la función $f(x) = e^x$ y el eje x entre las abscisas $x = 0$ y $x = \ln 2$.
- 5.7. Arquímedes demostró que el área de un arco parabólico es igual a las $\frac{2}{3}$ partes del producto de la base por la altura de dicho arco.
 - 5.7.1. Dibuje la región limitada por el arco parabólico $y = 9 - x^2$ y el eje x .
 - 5.7.2. Calcule su área mediante una integral adecuada.
 - 5.7.3. Encuentre la base y la altura del arco desde los datos de la gráfica y calcule el área aplicando la fórmula de Arquímedes.
- 5.8. Halle el valor del área bajo la curva de la función $y = \cos x$ en el intervalo $[-\pi ; 2\pi]$.

6. Área entre curvas planas en coordenadas cartesianas

- 6.1. Halle el área limitada por las curvas de las funciones $f(x) = -x$ y $g(x) = x^2 - 2$.



1-PRIMER PASO: consiste en graficar la región del plano a la que se debe calcular el área, para eso se puede utilizar la herramienta GeoGebra. En la gráfica izquierda se observa la región objeto sombreada con gris.

2-SEGUNDO PASO: se determinan los límites de integración; para esto hay que calcular el valor de las abscisas de los puntos de intersección entre las dos funciones;

$$f(x) = g(x)$$

$$-x = x^2 - 2$$

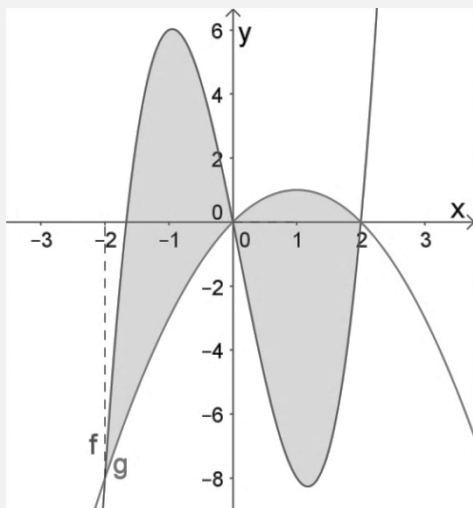
$$0 = x^2 + x - 2 \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

3-TERCER PASO: se debe plantear una integral para calcular el área. El contorno superior (“techo”) de la región está dado por la función $f(x) = -x$, mientras que el contorno inferior (“piso”), es formado por la función $g(x) = x^2 - 2$: Una regla mnemotécnica muy útil consiste en plantear la integral como “techo menos piso”:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)] dx = \int_{-2}^1 [(-x) - (x^2 - 2)] dx \\
 &= \int_{-2}^1 -x^2 dx - \int_{-2}^1 x dx + \int_{-2}^1 2 dx \\
 &= \frac{27}{6} u^2 = 4.5u^2
 \end{aligned}$$

6.2. Calcule el área de la región rodeada por las gráficas de las funciones

$$\begin{cases} f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x \\ g(x) = -x^2 + 2x \end{cases}$$



1-PRIMER PASO: En la gráfica izquierda se observa la región encerrada entre las dos funciones. Dicha región se divide en dos sub-regiones.

2-SEGUNDO PASO: Se determinan los límites de integración; coherentemente con lo observado en la gráfica se obtendrán 3 abscisas de los puntos de intersección:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= g(x) \\
 3x^3 - x^2 - 10x &= -x^2 + 2x \\
 3x^3 - 12x &= 0 \text{ (Ec. de 3º grado)} \\
 3x(x^2 - 4) &= 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

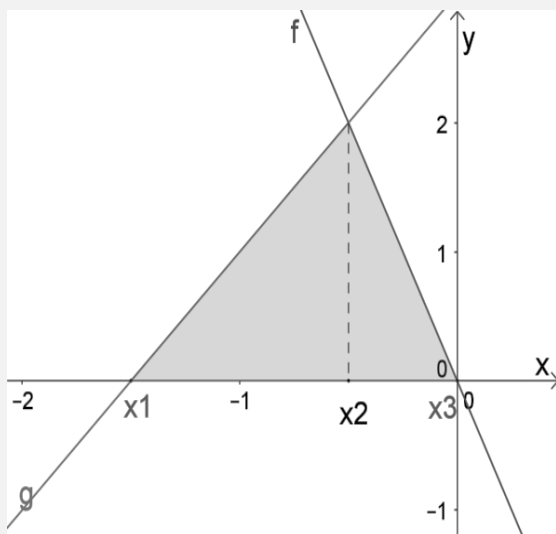
3-TERCER PASO: en este caso se deben plantear dos integrales como área entre curvas para calcular el área, ya que $f(x) \geq g(x)$ en $[-2, 0]$, mientras que $g(x) \geq f(x)$ en $[0, 2]$.

$$A = \int_{-2}^0 (f(x) - g(x)) dx + \int_0^2 (g(x) - f(x)) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-2}^0 [(3x^3 - x^2 - 10x) - (-x^2 + 2x)]dx + \int_0^2 [(-x^2 + 2x) - (3x^3 - x^2 - 10x)]dx \\
 &= \int_{-2}^0 (3x^3 - 12x)dx + \int_0^2 (-3x^3 + 12x)dx = \left[3\frac{x^4}{4} - 6x^2\right]_{-2}^0 + \left[-3\frac{x^4}{4} + 6x^2\right]_0^2 \\
 &= 0 - \left(3\frac{(-2)^4}{4} - 6(-2)^2\right) + \left(-3\frac{2^4}{4} + 6(2)^2\right) - 0 = \boxed{24 u^2}
 \end{aligned}$$

6.3. Calcule el valor del área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones

$$f(x) = -4x \text{ y } g(x) = 2x + 3 \text{ y el eje } x.$$



1-PRIMER PASO: Cuando se grafican las funciones y se indica el área pedida se observa que a pesar de participar dos funciones **no se trata de un área entre dos curvas** ya que no se encuentra totalmente circunscripta entre ellas. El ejercicio debe resolverse como área bajo la curva de una y de otra función según corresponda con el intervalo de integración y sumar los resultados de ambas integrales.

2-SEGUNDO PASO: se determinan los límites de integración, para esto se encuentran las abscisas al origen y la abscisa del punto de intersección :

$$f(x) = g(x)$$

$$-4x = 2x + 3$$

$$-6x = 3 \rightarrow x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Abscisa al origen de } f: -4x_3 = 0 \rightarrow x_3 = 0$$

$$\text{Abscisa al origen de } g: 2x_1 + 3 = 0 \rightarrow x_1 = -\frac{3}{2}$$

3-TERCER PASO: en este caso de deben plantear dos integrales como área bajo la curva o área entre la curva y el eje x en los intervalos $[x_1, x_2] = \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right]$ y $[x_2, x_3] = \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$:

$$A = \int_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} g(x)dx + \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(x)dx = \int_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} (2x + 3) dx + \int_{-\frac{1}{2}}^0 -4x dx$$

$$= [x^2 + 3x]^{-\frac{1}{2}}_{-\frac{3}{2}} + [-2x^2]^0_{-\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{= \frac{3}{2}u^2}$$

Ejercicios propuestos:

- 6.4. Calcule el área limitada por las curvas de las funciones $f(x) = 6x - 4x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x$.
- 6.5. Grafique la región limitada por las curvas $f(x) = 4 - x^2$ y $g(x) = x + 2$ y calcule el área determinada por ambas.
- 6.6. Determine el área limitada por las curvas de las funciones $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ y $g(x) = -x + 4$ y el eje x .
- 6.7. Las gráficas de las funciones $f(x) = \sin x$ y $g(x) = \cos x$ se cortan infinitas veces, encerrando regiones de áreas iguales. Calcule el área de una de esas regiones.
- 6.8. Calcule el área limitada por las curvas de las funciones $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ y $g(x) = x^3 - 3x$.
- 6.9. Encuentre mediante el uso de cálculos integrales el área del polígono circunscripto por las siguientes tres rectas. Puede corroborar el resultado con cálculos geométricos.

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \qquad g(x) = -x - \frac{3}{2} \qquad h(x) = \frac{3}{2}x - 4$$
- 6.10. Calcule el área encerrada entre las siguientes parábolas. Grafique previo al cálculo.

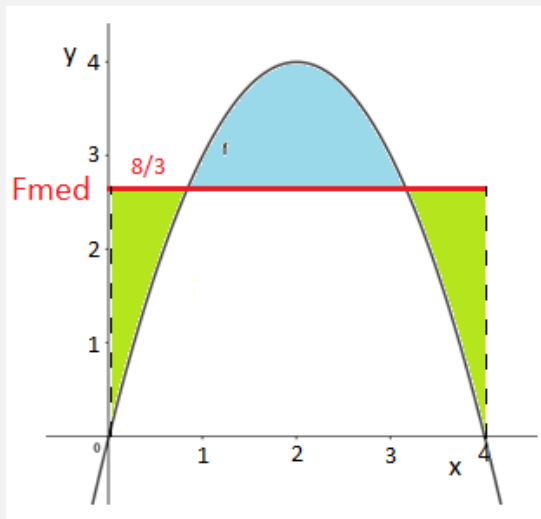
$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = x^4$$

7. Cálculo de valores medios

7.1. a) Pruebe que la función dada cumple con las condiciones del teorema del valor medio para integrales en el intervalo.

b) Calcule el valor medio de las ordenadas de la curva en el intervalo dado. Grafique previo al cálculo.

7.1.1. $f(x) = 4x - x^2$ en el intervalo delimitado por las abscisas de las intersecciones de $f(x)$ y el eje x .



Sol:

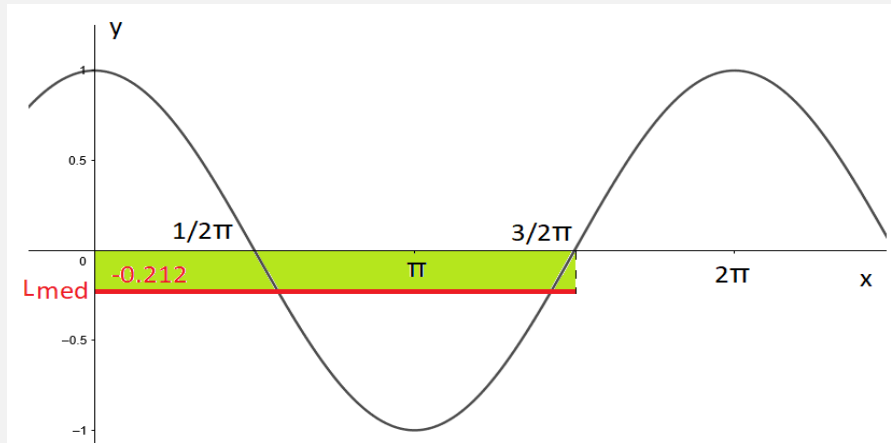
a) La función $f(x) = 4x - x^2$ es derivable en todo su dominio, por lo tanto es continua en el intervalo pedido y es posible aplicar el teorema del valor medio.

b) Para calcular el valor medio, se deben encontrar las abscisas de la intersección con el eje "x" que determinan el intervalo de integración:

$$4x - x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_{med} &= \frac{1}{(4 - 0)} \int_0^4 (4x - x^2) dx \\ &= \frac{1}{4} \left[4 \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^4 \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[4(8 - 0) - \left(\frac{64}{3} - 0 \right) \right] = \boxed{\frac{8}{3}} \end{aligned}$$

7.1.2. $l(x) = \cos x$ en el intervalo $\left[0, \frac{3}{2}\pi\right]$



Sol: a) La función $l(x) = \cos x$ es derivable en todo su dominio, por lo tanto es continua en el intervalo $\left[0, \frac{3}{2}\pi\right]$ y es posible la aplicación del teorema del valor medio para integrales.

b) Se plantea la integral en el intervalo: la misma es una integral definida inmediata, por lo tanto se resuelve de forma directa:

$$\begin{aligned}
 l_{med} &= \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\pi - 0\right)} \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos x \, dx \\
 &= \frac{2}{3\pi} \left[\operatorname{sen} x \right]_0^{\frac{3}{2}\pi} \\
 &= \frac{2}{3\pi} \left[\operatorname{sen} \left(\frac{3}{2}\pi \right) - \operatorname{sen}(0) \right] \\
 &= \frac{2}{3\pi} [-1] \\
 &= \boxed{\frac{-2}{3\pi} \approx -0.212}
 \end{aligned}$$

PARA TENER EN CUENTA: ¿Se puede calcular el Área usando el Valor Medio de la función?

En el ejercicio resuelto 7.1.1, si se intenta calcular el área de la función $f(x) = 4x - x^2$ en el intervalo usando la función $y = f_{med} = \frac{8}{3}$ se tendría un error por exceso igual a las áreas sombreadas en verde y un error por defecto igual al área sombreada en azul. Como en este caso el área calculada por exceso y el área calculada por defecto coinciden, no se estaría cometiendo ningún error.

A diferencia del anterior, el ejercicio resuelto 0, si se intenta calcular el área de la función $l(x) = \cos x$ en el intervalo pedido usando la función $y = l_{med} = \frac{-2}{3\pi}$, el error por exceso y por

defecto no serán iguales. (se puede verificar fácilmente intentando calcular las áreas bajo la curva que generan ambas funciones. En el primer caso el resultado será $A_{l(x)} = 3u^2$, mientras que $A_{lmed} = 1u^2$, o bien visualmente, comparando la región sombreada en verde en la gráfica, y la región encerrada entre la curva y el eje x en el intervalo).

CONCLUSIÓN: ¡SOLO SE PUEDE USAR EL VALOR MEDIO DE UNA FUNCIÓN PARA CALCULAR EL ÁREA BAJO LA CURVA DE ELLA, EN UN INTERVALO, SI Y SOLO SI DICHA FUNCIÓN NO CAMBIA DE SIGNO EN ESTE INTERVALO!

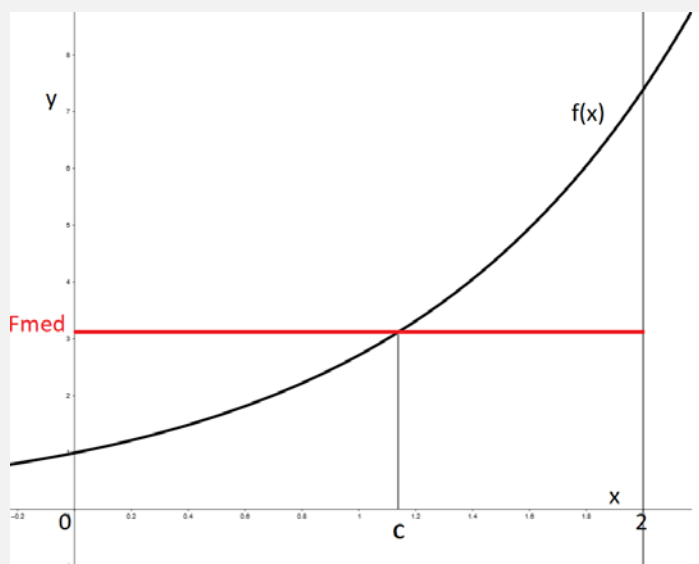
7.2. a) Pruebe que la función dada cumple con las condiciones del teorema del valor medio para integrales en el intervalo.

b) Calcule el valor medio de las ordenadas de la curva.

c) Encuentre el/los valores de ordenada que corresponden al valor medio de la función en el intervalo. Grafique previo al cálculo.

7.2.1. $y = e^x$ para $[0, 2]$.

Sol: a) Condiciones del teorema: La función dada es continua para todos los reales por lo que es continua para el intervalo dado, por lo tanto se puede afirmar que :



$$\exists \rightarrow c \in [a, b] \text{ tal que: } \int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$$

y además : $f(c) = f_{med}$ valor medio de $f(x)$ en el int. $[a, b]$

b) para este ejemplo: $f_{med} = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx =$

$$f_{med} = \frac{1}{(2-0)} \int_0^2 e^x dx = \frac{e^2 - 1}{2}$$

c)

$$f(c) = \frac{e^2 - 1}{2} : \text{Valor medio}$$

$$e^c = \frac{e^2 - 1}{2}$$

$$c = \ln\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\cong \boxed{1,16 \in [0, 2]}$$

Ejercicios propuestos:

7.2.2. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en el intervalo $[-1 ; 1]$.

7.2.3. $w(x) = \tan x$, en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{8}\right]$

Banco de Ejercicios Integradores de Segundo Nivel de Dificultad:

Dadas las siguientes funciones, gráfíquelas usando GeoGebra, plantee integrales adecuadas para calcular el área bajo la curva en el intervalo pedido. Resuélvalas. Identifique cuales cumplen las condiciones del teorema del valor medio para integrales en el intervalo.

1. $w(x) = -\frac{x^3}{4}$ en $[-4,4]$

2. $h(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ en $[1,3]$

3. $g(x) = \sin \frac{x}{2}$ en $[0,2\pi]$

4. $v(x) = \frac{1}{e^{2x+1}}$ en $[0,4]$

5. $f(x) = e^{-x} \sin x$ en $[-\pi, \pi]$

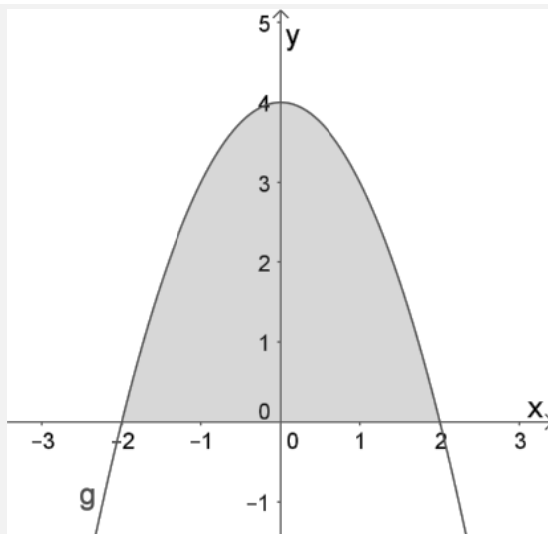
6. $r(x) = \sin x$ en $[0, \pi]$

7. $s(x) = \frac{8}{(x^2+4)}$ en $[0, \infty)$

8. $f(x) = \ln x$ en $[0,1]$

8. Volúmenes de sólidos de revolución

8.1. Calcular el volumen del sólido de revolución generado al hacer girar la región acotada por la función $g(x) = -x^2 + 4$ y el eje x.



1-: En la gráfica izquierda se observa la región sombreada que genera al volumen al girar sobre el eje x

2-: para determinar los límites de integración hay que encontrar los ceros de la función:

$$-x^2 + 4 = 0$$

$$-(x-2)(x+2) = 0 \quad \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

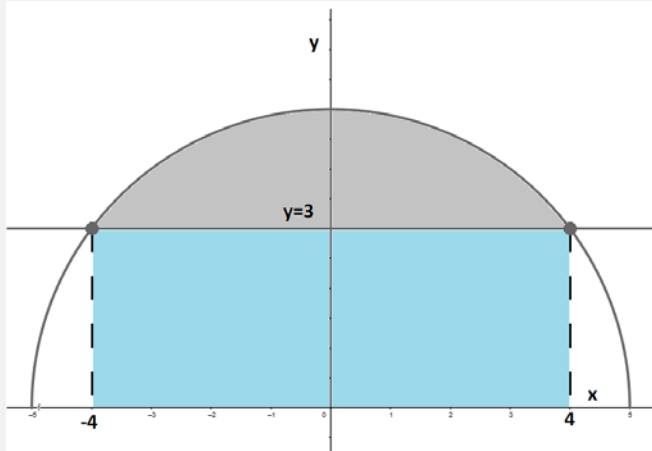
3- Se plantea la integral :

$$\begin{aligned} V_{SR} &= \int_{x_1}^{x_2} \pi [g(x)]^2 dx = \\ &= \int_{-2}^2 \pi [-x^2 + 4]^2 dx = \pi \int_{-2}^2 (x^4 - 8x^2 + 16) dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} - 8\frac{x^3}{3} + 16x \right]_{-2}^2 \\ &= \pi \left(\left(\frac{2^5}{5} - \frac{(-2)^5}{5} \right) - 8 \left(\frac{2^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} \right) + 16(2 - (-2)) \right) \\ &= \boxed{34,13 \pi u^3} \end{aligned}$$

8.2. Un fabricante diseña un objeto metálico, en forma de esfera con un radio de 5cm, y con un orificio cilíndrico en su interior, como muestra la figura. El hueco tiene un radio de 3cm. ¿Cuál es la masa del objeto resultante si la densidad del acero con que se fabricó es de 7,85 g/cm³?



Para lograr determinar la masa, primero debe encontrarse el valor de su volumen:



1-: El objeto puede modelarse como un sólido de revolución generado por un segmento del círculo centrado en el origen de radio 5 cuya ecuación es: $x^2 + y^2 = 25$; intersectado con un sólido de revolución (cilindro) generado por una función constante de valor igual al radio: $y = 3$

2-: Como el radio del orificio es 3, ese es el valor en y hasta donde debe considerarse la ecuación. Asignando ese valor a la variable y , se determinan los límites de x :

$$\begin{aligned} \text{Círculo: } & \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = 3 \end{cases} \\ \text{Cilindro: } & \end{aligned}$$

$$x^2 + 3^2 = 25 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

3- Se plantea la integral como la diferencia de los dos volúmenes generados por las regiones:

$$\begin{aligned} V_{SR} &= V_{\text{círculo}} - V_{\text{rectángulo}} = \int_{-4}^4 \pi \left[\sqrt{25 - x^2} \right]^2 dx - \int_{-4}^4 \pi [3]^2 dx \\ &= \pi \int_{-4}^4 (25 - x^2) dx - \pi \int_{-4}^4 9 dx = \pi \int_{-4}^4 (25 - x^2 - 9) dx \\ &= \pi \int_{-4}^4 (16 - x^2) dx = \pi \left[16x - \frac{x^3}{3} \right]_{-4}^4 = \pi \left(16(4 - (-4)) - \left(\frac{4^3}{3} - \frac{(-4)^3}{3} \right) \right) \\ &= \boxed{\frac{256}{3} \pi u^3} \end{aligned}$$

Finalmente; el volumen del sólido es entonces, si consideramos que x e y están medidos en cm , de $\frac{256}{3} \pi \text{ cm}^3$. Para calcular la masa empleamos la densidad:

$$m = \frac{256}{3} \pi \text{ cm}^3 \cdot 7,85 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

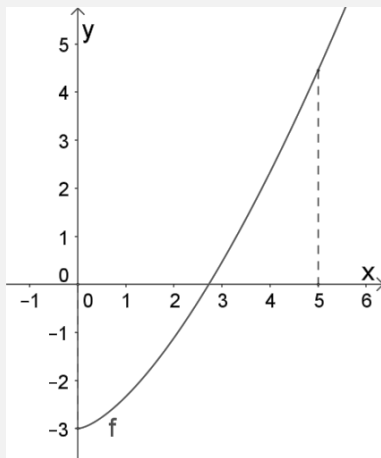
$$m = 2104,45 \text{ g}$$

Ejercicios propuestos:

- 8.3. Calcular el volumen del tronco cono determinado al hacer girar la recta de ecuación $y = 4 - x$ entre $x = 0$ y $x = 2$.
- 8.4. Determinar el volumen del sólido generado al hacer girar la función $g(x) = x^2 + 1$ en torno al eje x en el intervalo $[0, 2]$.
- 8.5. Obtener el volumen del cuerpo engendrado cuando la región limitada por la gráfica de la función $y = 3x - x^3$ y la recta $y = x$ se hace girar en torno al eje x .
- 8.6. Hallar el volumen de un cono cuya generatriz presenta una pendiente igual a 3 y tiene una altura de 6.
- 8.7. Comprobar mediante integrales que el volumen del cilindro es el triple del volumen del cono.

9. Rectificación de curvas planas: Longitud de un arco de curva

- 9.1. Dada la función $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 3$, calcular la longitud de la curva que define la función en el intervalo $[0, 5]$.



1-: Para plantear la integral, primero se obtiene la derivada de la función:

$$f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 3$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}$$

2- Se plantea la integral :

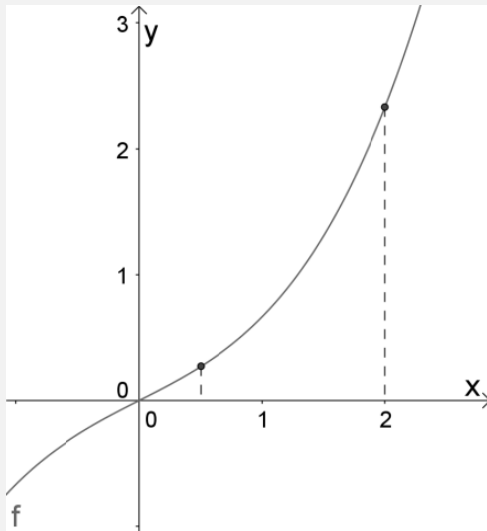
$$L = \int_0^5 \sqrt{1 + \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx$$

$$L = \int_0^5 \sqrt{1 + x} dx = \int_0^5 (1 + x)^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{(1 + x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^5 = \frac{2}{3} \left((1 + 5)^{\frac{3}{2}} - (1 + 0)^{\frac{3}{2}} \right)$$

$$L = \boxed{9,13 \text{ u}}$$

9.2. Calcular la longitud de arco de la gráfica de $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$, entre $x = \frac{1}{2}$ y $x = 2$

En la gráfica de la función puede observarse la longitud que se pide:



1-: Para plantear la integral, primero se obtiene la derivada de la función:

$$f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{6} - \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{1}{x^2} \right)$$

2- Se plantea la integral :

$$L = \int_{\frac{1}{2}}^2 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{1}{x^2} \right) \right)^2} dx$$

$$L = \int_{\frac{1}{2}}^2 \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(x^4 - 2 + \frac{1}{x^4} \right)} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \sqrt{1 + \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^4}} dx$$

$$L = \int_{\frac{1}{2}}^2 \sqrt{\frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^4}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \sqrt{\frac{1}{4} \left(x^4 + 2 + \frac{1}{x^4} \right)} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \sqrt{\frac{1}{4} \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right)^2} dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{2} \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{13}{6} + \frac{47}{24} \right) = \boxed{\frac{33}{16} u}$$

Ejercicios propuestos:

9.3. Encontrar la longitud del segmento de recta cuya fórmula es $y = 3x + 5$ entre $x = 1$ y $x = 4$.

9.4. Calcular la longitud de arco de la gráfica de $y = x^{\frac{3}{2}}$, entre $x = 1$ y $x = 2$.

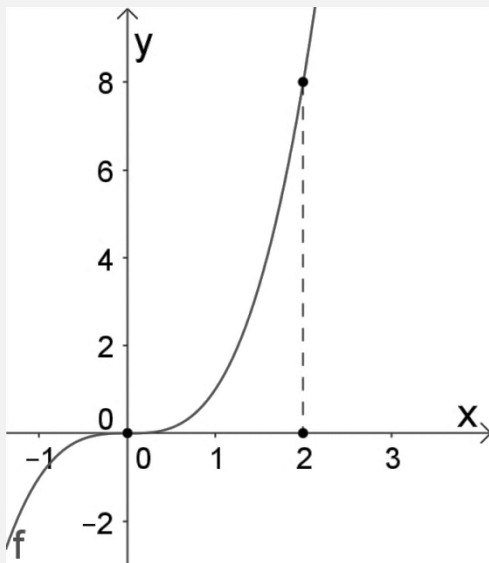
9.5. Dada la función $9y^2 = 4x^3$, calcular la longitud de la curva que define la función en el intervalo $[0,3]$

9.6. Dada la función $24xy - x^4 - 48 = 0$, calcular la longitud de la curva que define la función en el intervalo $[2,4]$

- 9.7. Calcular la longitud de arco de un cuarto de circunferencia de radio $r=1$, verificar que el resultado es la cuarta parte de la longitud de la circunferencia.

10. Áreas de superficies de revolución

- 10.1. Calcular el área de la superficie generada al rotar, en torno al eje x , el arco de la curva $y = x^3$ desde el punto $(0, 0)$ al punto $(2, 8)$.



1-: Para plantear la integral, primero se obtiene la derivada de la función:

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

2- Se plantea la integral :

$$A_{SR} = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$A_{SR} = 2\pi \int_0^2 x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2} dx$$

Para resolverla se realiza un cambio de variables que facilite la integración:

$$2\pi \int_0^2 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx \longrightarrow \text{Sustitución: } \begin{cases} t = 1 + 9x^4 \\ dt = 36x^3 dx \\ dx = \frac{1}{36x^3} dt \end{cases}$$

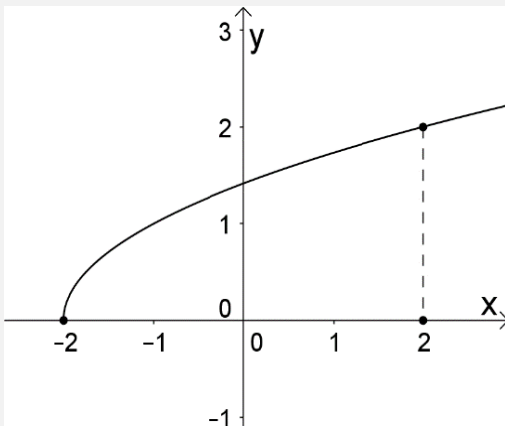
NUEVOS LÍMITES:

$$\text{si } x = 0 \text{ entonces } \rightarrow t = 1 + 9 \cdot 0^4 = 1$$

$$\text{si } x = 2 \text{ entonces } \rightarrow t = 1 + 9 \cdot 2^4 = 145$$

$$\begin{aligned} A_{SR} &= 2\pi \int_1^{145} x^3 \sqrt{t} \frac{1}{36x^3} dt = 2\pi \frac{1}{36} \int_1^{145} t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{\pi}{18} \left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^{145} \\ &= \frac{\pi}{27} \left(145^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}} \right) = \boxed{64,6 \pi u^2} \end{aligned}$$

- 10.2. Obtener el valor del área de la superficie de revolución generada al girar la curva definida por la función $f(x) = \sqrt{x+2}$ en el intervalo $[-2, 2]$ alrededor del eje x.



1-: Para plantear la integral, primero se obtiene la derivada de la función:

$$f(x) = \sqrt{x+2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

2- Se plantea la integral :

$$A_{SR} = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$A_{SR} = 2\pi \int_{-2}^2 (\sqrt{x+2}) \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\right)^2} dx$$

$$A_{SR} = 2\pi \int_{-2}^2 (\sqrt{x+2}) \sqrt{1 + \frac{1}{4(x+2)}} dx = 2\pi \int_{-2}^2 (\sqrt{x+2}) \sqrt{\frac{4(x+2) + 1}{4(x+2)}} dx =$$

$$= 2\pi \int_{-2}^2 (\sqrt{x+2}) \frac{\sqrt{4(x+2) + 1}}{2\sqrt{(x+2)}} dx = \pi \int_{-2}^2 \sqrt{4x+9} dx =$$

Para resolverla se realiza un cambio de variables que facilite la integración:

$$\pi \int_{-2}^2 \sqrt{4x+9} dx \longrightarrow \text{Sustitución: } \begin{cases} 4x+9 = z \\ 4dx = dz \\ dx = \frac{1}{4}dz \end{cases}$$

NUEVOS LÍMITES: si $x = 2$ entonces $\rightarrow z = 4 \cdot 2 + 9 = 17$
 si $x = -2$ entonces $\rightarrow z = 4(-2) + 9 = 1$

$$A_{SR} = \pi \int_1^{17} \sqrt{z} \frac{1}{4} dz = \frac{\pi}{4} \int_1^{17} z^{\frac{1}{2}} dz = \frac{\pi}{4} \left[\frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^{17} = \frac{\pi}{6} \left[z^{\frac{3}{2}} \right]_1^{17}$$

$$= \frac{\pi}{6} \left[17^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}} \right] = \boxed{11,52 \pi u^2}$$

Ejercicios propuestos:

- 10.3. Obtener el valor del área de la superficie de revolución generada al girar la curva definida por la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, \sqrt{2}]$ alrededor del eje y .
- 10.4. Calcular el área de la superficie de revolución formada al hacer girar en torno al eje x la gráfica de $f(x) = 2\sqrt{6-x}$ en el intervalo $[3, 6]$.
- 10.5. Calcular el área lateral de la superficie generada por la revolución de la curva $y = 3x + 2$ alrededor del eje x entre las rectas $x = 1$ y $x = 3$. Graficar previo al cálculo.
- 10.6. Calcular el área de la superficie de revolución generada al girar la función $y = \sqrt{12x}$ alrededor del eje x entre $x=0$ y $x=3$.
- 10.7. Calcular el área de la superficie de revolución engendrada al girar la función $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ alrededor del eje x entre $x=0$ y $x=1$. ¿Qué nombre recibe esta función?
- 10.8. Obtener mediante cálculos integrales el área lateral de un cono circular de altura h y radio r ($A_L = \pi r g = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$)

