Guía de Ejercicios Tema 5

MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACIÓN
Universidad Nacional de San Juan

FACULTAD DE INGENIERÍA

Departamento de Matemática

Cátedra: CÁLCULO I – ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Autoría: Equipo de cátedra - 2021

EJERCITACIÓN TEMA 5

INTEGRALES INDEFINIDAS

CÁLCULO DE PRIMITIVAS

Integración inmediata

1. Del tipo: $\int F'(x)dx = F(x) + C$

1.1. $\int \frac{2}{x}dx = 2\int \frac{1}{x}dx = \boxed{2\ln x + C}$

Ejercicios propuestos:

1.2. $\int \frac{1}{e^x}dx$

1.3. $\int \sqrt{x-2}\,dx$

1.4. $\int ax^2dx$

1.5. $\int 3^x dx$

1.6. $\int \sqrt[3]{x^2}dx$

1.7. $\int \sec x \cdot tg\ x\,dx$

2. Del tipo: $\int f^n(x)\cdot f'(x)dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C$

2.1. $\int cos^2x \cdot sen\ x\,dx = -\int cos^2x\cdot(-sen\ x)dx = \boxed{-\frac{cos^3x}{3} + C}$

2.2. $\int \sqrt{e^x + x}\,(e^x+1)\,dx = \int (e^x+x)^{\frac{1}{2}}(e^x+1)dx = \boxed{\frac{(e^x+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C}$

Ejercicios propuestos:

2.3. $\int \frac{\ln x}{x} dx$

2.4. $\int \cos x \cdot sen\, x\, dx$

2.5. $\int (2+x)^{-3} dx$

2.6. $\int (4x-3)^2 dx$

2.7. $\int \frac{arcsen\, x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

2.8. $\int (x+e^{2x})(x^2+e^{2x}) dx$

Resultado 2.8: $\boldsymbol{I = \frac{1}{2}\frac{\left(x^2+e^{2x}\right)^2}{2} + C}$

3. Del tipo: $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = ln\, f(x) + C$

3.1. $\int \frac{e^x}{e^x+1}\, dx = \boxed{ln(e^x+1)+C}$

3.2. $\int \frac{3}{x \cdot ln\, x} dx = 3\int \frac{1}{x \cdot ln\, x} dx = 3\int \frac{\frac{1}{x}}{ln\, x} dx = \boxed{3\, ln(ln\, x) + C}$

Ejercicios propuestos:

3.3. $\int \frac{1}{x \ln x} dx$

3.4. $\int \frac{1}{tg\, x \cdot cos^2 x} dx$

3.5. $\int \frac{x+3}{x^2+6x} dx$

3.6. $\int \frac{1}{2x-3} dx$

3.7. $\int tg\, x\, dx$

3.8. $\int (3-x)^{-1} dx$

Resultado 3.5: $\boldsymbol{I = \frac{1}{2} ln(x^2+6x) + C}$

Resultado 3.8: $\boldsymbol{I = -ln(3-x) + C}$

4. Linealidad de la integral

$$\int \big(f(x)+g(x)\big)\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

$$\int k\, f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$$

4.1. $\int (3x^2 - 5x^3 + 3x + 4)\, dx =$

$$3\int x^2 dx - 5\int x^3\, dx + 3\int x\, dx + 4\int dx = \boxed{x^3 - \frac{5}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 4x + C}$$

Ejercicios propuestos:

4.2. $\int\left(\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}+5x^4\right)dx$

4.3. $\int\left(sen\ x+\frac{\cos x}{2}-4sec^2x\right)dx$

4.4. $\int\left(\sqrt{x}-2\right)dx$

4.5. $\int(1-x)\sqrt{x}\,dx$

Integración por sustitución (algunas pueden resolverse en forma inmediata)

5. Resuelva aplicando convenientemente sustitución por cambio de variable

5.1. $\int x\cdot e^{x^2}dx$

$$\left.\begin{array}{r} t=x^2 \\ x=\sqrt{t} \\ dx=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\,dt \end{array}\right\}\int\sqrt{t}\,e^t\,\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\int e^t dt=\frac{1}{2}e^t+C$$

$$\text{Volviendo con la sustitución}\rightarrow=\boxed{\frac{1}{2}e^{x^2}+C}$$

5.2. $\int\frac{dx}{\sqrt{25-16x^2}}$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{25-16x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{25\left(\frac{25}{25}-\frac{16x^2}{25}\right)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(1-\frac{16x^2}{25}\right)25}}=\int\frac{1}{\sqrt{25}}\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{4x}{5}\right)^2}}=$$

$$\text{Sustituyendo:}\left\{\begin{array}{l} t=\dfrac{4}{5}x \\ dt=\dfrac{4}{5}\,dx \\ \dfrac{5}{4}dt=dx \end{array}\right\}\frac{1}{5}\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{5}{4}dt=\frac{1}{4}arcsen\ t+C$$

$$=\boxed{\frac{1}{4}arcsen\left(\frac{4}{5}x\right)+C}$$

5.3. $\int x \cdot \sqrt{1+x}\, dx$

$$\left.\begin{array}{r} t = 1+x \\ dt = dx \\ x = t-1 \end{array}\right\} \int (t-1)\cdot\sqrt{t}\, dt = \int (t-1)\cdot t^{\frac{1}{2}}\, dt = \int \left(t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right)\, dt = \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$$

$$= \boxed{\frac{(1+x)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C}$$

5.4. $\int \frac{1}{9+x^2} dx = \int \frac{1}{9\left(1+\frac{x^2}{9}\right)} dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(1+\left(\frac{x}{3}\right)^2\right)} dx = \boxed{\frac{1}{3} arctg\ \left(\frac{x}{3}\right) + c}$

Ejercicios propuestos:

5.5. $\int sen(kx+b)dx; \quad k, b \in R$

5.6. $\int x\sqrt{x^2-1}\, dx$

5.7. $\int \frac{x}{4-2x^2} dx$

5.8. $\int e^{\cos x} sen\ x\ dx$

5.9. $\int \frac{4x-3}{2x^2-3x-14} dx$

5.10. $\int \sqrt[3]{1-2x}\, dx$

5.11. $\int e^{kx+b} dx; \quad k, b \in R$

Resultado 5.5: $\boldsymbol{I = \frac{1}{k}(-\cos(kx+b)) + C}$

Resultado 5.8: $\boldsymbol{I = -e^{\cos x} + C}$

Integración por partes

Algunos casos en que se debe emplear el método de integración por partes:
• Producto de dos funciones donde una no es la derivada de la otra (o no puede ajustarse por medios algebraicos).
• Funciones trascendentes con derivada algebraica.

$$Fórmula\ de\ sustitución:\ \ I = \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

6. Resuelva aplicando integración por partes

PRODUCTO DE DOS FUNCIONES

6.1. $\int sen\ x \cdot ln\, cos\ x\ \ dx$

$$\left.\begin{array}{c} u = ln\cos x \rightarrow du = \frac{1}{\cos x}(-senx)\,dx \\ dv = sen\,x\,dx \rightarrow v = -\cos x \end{array}\right\}$$

$$I = -\cos x \cdot\ ln\cos x - \int -\cos x \frac{1}{\cos x}(-sen\,x)\,dx = -\cos x \cdot\ ln\cos x - \int sen\,x\,dx =$$

$$\boxed{-\cos x \cdot\ ln\cos x + \cos x + C}$$

6.2. $\int x^2 \cdot e^x\,dx \rightarrow$ *requiere integrar por partes más de una vez*

$$\left.\begin{array}{c} u = x^2 \rightarrow du = 2x\,dx \\ dv = e^x\,dx \rightarrow v = e^x \end{array}\right\}$$

$$I = x^2 \cdot e^x - \int e^x \cdot 2x\,dx = x^2 \cdot e^x - 2\int e^x \cdot x\,dx =$$

$$\left.\begin{array}{c} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^x\,dx \rightarrow v = e^x \end{array}\right\}$$

$$I = x^2 \cdot e^x - 2\left(x \cdot e^x - \int e^x\,dx\right) = \boxed{x^2 \cdot e^x - 2(x \cdot e^x - e^x) + C}$$

FUNCIÓN TRASCENDENTE CON DERIVADA ALGEBRAICA

6.3. $\int \ln x\ \,dx \rightarrow$ *se aplica a integrandos de un solo factor, donde* $dv = dx$

$$\left.\begin{array}{c} u = ln\,x \rightarrow du = \frac{1}{x}\,dx \\ dv = \ dx \rightarrow v = x \end{array}\right\}$$

$$I = ln\,x \cdot\ x - \int x\frac{1}{x}\,dx = ln\,x \cdot\ x - \int 1\,dx = \boxed{ln\,x \cdot\ x - x + C}$$

Ejercicios propuestos:

6.4. $\int ln^2 x\,dx$

6.5. $\int x \cdot 2^x dx$

6.6. $\int (3-x) \cdot \cos 3x\,dx$

6.7. $\int \frac{x}{sen^2 x}dx$

6.8. $\int arcsen\,x\,dx$

6.9. $\int \cos x \cdot e^x\,dx$

Resultado 6.4: $\boldsymbol{I = \ ln^2\,x.x - 2(\ln x.x - x) + C}$

Resultado 6.8: $\boldsymbol{I = x.arcsen\,x + \frac{1}{2}2(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C}$

Integración de otras funciones trigonométricas

7. Potencias de funciones trigonométricas

7.1. $\int sen^2 x \; dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x) dx = \frac{1}{2}(\int dx - \int \cos 2x \; dx) =$

$$I = \boxed{\frac{1}{2}\left(x - \frac{sen\;2x}{2}\right) + C}$$

7.2. $\int cos^3 x\, dx = \int \cos x \cdot cos^2 x\, dx = \int \cos x \cdot (1 - sen^2 x)\, dx$

$$I = \int (\cos x - \cos x \cdot sen^2 x)\, dx = \int \cos x \; dx - \int \cos x \cdot sen^2 x \; dx = \boxed{sen\; x - \frac{sen^3 x}{3} + C}$$

Ejercicios propuestos:

7.3. $\int cos^2 x\, dx$ 7.4. $\int sen^3 x\, dx$

7.5. $\int tg^2 x\, dx$ 7.6. $\int cos^3 x \cdot tg\; x\, dx$

Resultado 7.4.: $\boldsymbol{I = tg\; x - x + C}$

Las integrales de $f(x) = cos^2 x$ y $g(x) = sen^2 x$ pueden resolverse de la siguiente manera:

7.7. Resuelva aplicando integración por partes a: $\int cos^2 x \; dx$

$$\left.\begin{array}{r} u = \cos x \to du = -sen\; x\, dx \\ dv = \cos x \; dx \to v = sen\; x \end{array}\right\}$$

$$I = \int cos^2 x \; dx = \cos x \cdot \; sen\; x - \int (-sen\; x \; \cdot sen\; x)\, dx = \cos x \cdot \; sen\; x + \int sen^2\; x\, dx =$$

$$I = \int cos^2 x \; dx = \cos x \cdot \; sen\; x + \int 1 - cos^2\; x\, dx = \cos x \cdot \; sen\; x + \int \; dx - \int cos^2\; x\, dx$$

$$I = 2\int cos^2 x \; dx = \cos x \cdot \; sen\; x + \int \; dx = \cos x \cdot \; sen\; x + x = \boxed{\frac{\cos x \cdot \; sen\; x + x}{2} + C}$$

7.8. Resuelva aplicando integración por partes a: $\int sen^2 x \; dx$

Integración de funciones racionales

8. Cociente $\frac{P(x)}{Q(x)}$ con $gr(P) < gr(Q)$

<u>Caso: raíces reales simples del denominador</u>

8.1. $\int \frac{x-1}{x^2+x-6} dx$

$$\int \frac{x-1}{x^2+x-6} dx = \int \frac{x-1}{(x-2)(x+3)} dx = \int \left(\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}\right) dx = \int \frac{A(x+3) + B(x-2)}{(x-2)(x+3)} dx$$

Tomando la primera expresión y la última de la igualdad anterior, se deduce que:

$$x-1=A(x+3)+B(x-2)$$

$$Si\ \ x=2\rightarrow 1=A\cdot 5+0\rightarrow A=\frac{1}{5}$$

$$Si\ \ x=-3\rightarrow -4=0+B\cdot(-5)\rightarrow B=\frac{4}{5}$$

Reemplazando en la expresión de fracciones simples:

$$I=\int\left(\frac{\frac{1}{5}}{x-2}+\frac{\frac{4}{5}}{x+3}\right)dx=\frac{1}{5}\int\frac{1}{x-2}dx+\frac{4}{5}\int\frac{1}{x+3}dx=$$

$$\boxed{I=\frac{1}{5}ln\ (x-2)+\frac{4}{5}ln(x+3)+C}$$

<u>Caso: raíces reales múltiples del denominador</u>

8.2. $\displaystyle\int\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}dx$

$$\int\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}dx=\int\frac{5x^2+20x+6}{x(x+1)^2}dx=\int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$I=\int\frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}dx$$

Tomando la primera expresión y la última de la igualdad anterior, se tiene:

$$5x^2+20x+6=A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx$$

$$Si\ x=0\rightarrow \underline{6=A}$$

$$Si\ x=-1\rightarrow -9=C(-1)\rightarrow \underline{9=C}$$

Para determinar el otro coeficiente se toma cualquier otro valor de x y se usan los valores de A y C hallados:

$$Si\ x=1\rightarrow 31=6\cdot(2)^2+B\cdot 1\cdot(1+1)+9\cdot 1$$

$$31-24-9=B\cdot 2\rightarrow \underline{-1=B}$$

Reemplazando en la expresión de fracciones simples:

$$I=\int\left(\frac{6}{x}+\frac{-1}{x+1}+\frac{9}{(x+1)^2}\right)dx=6\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{1}{x+1}dx+9\int(x+1)^{-2}dx$$

$$I=\boxed{6\ln x-\ln(x+1)-9(x+1)^{-1}+C}$$

Guía de Ejercicios Tema 5

Ejercicios propuestos:

8.3. $\int \frac{4}{x(x+2)}dx$

8.4. $\int \frac{x+1}{x^2+4x+3}dx$

8.5. $\int \frac{2x+3}{x^3-x^2-6x}dx$

8.6. $\int \frac{3x+2}{2x^2-4x+2}dx$

Resultado 8.3: $\boldsymbol{I = 2\ ln\ x - 2\ ln(x+2) + C}$

Resultado 8.5: ***I =*** $\boldsymbol{\frac{3}{5}\ ln\ (x-3) - \frac{1}{10}\ ln\ (x+2) - \frac{1}{2}\ ln\ x + C}$

9. Resuelva las siguientes integrales

9.1. $\int cotg\ x\ dx$	9.2. $\int arctg\ x\ \ dx$	9.3. $\int \frac{(2x-1)^2}{2x}dx$
9.4. $\int \frac{x}{x^2+7x+6}dx$	9.5. $\int \frac{sen^3 x}{\cos x}dx$	9.6. $\int tg^2 x\ dx$
9.7. $\int \cos 7x\ \ dx$	9.8. $\int e^{2x+4} \cdot (2x+4)\ \ dx$	9.9. $\int x^2 \cdot sen\ x\ \ dx$
9.10. $\int \frac{1+2x}{1+x^2}dx$	9.11. $\int x \cdot e^{3x}\ dx$	9.12. $\int x^2 \cdot \ln x\ \ dx$
9.13. $\int sec^2 3x\ \ dx$	9.14. $\int \ln 3x\ \ \ dx$	9.15. $\int tg^2 x \cdot sec^2 x\ dx$
9.16. $\int \frac{x^2-x}{x^3-x^2}dx$	9.17. $\int (1-\cos x)^3 sen\ x\ dx$	9.18. $\int \frac{3x}{\sqrt{2x^2-3}}dx$
9.19. $\int e^{-2x+1}\ dx$	9.20. $\int (sen\ x + 7\ cos\ x - 1)\ dx$	9.21. $\int \frac{1}{9+4x^2}dx$
9.22. $\int \frac{2e^x+e^{2x}}{e^x}dx$	9.23. $\int \sqrt{1-3e^x} \cdot e^x dx$	9.24. $\int \frac{1}{x^2-4}dx$
9.25. $\int sen\ x \cdot e^x\ dx$	9.26. $\int (x^2-x-1)^3(2x-1)\ dx$	9.27. $\int \frac{x^3-2x+3}{x^2}dx$

10. En los ejercicios 10.1. a 10.6 determine si el enunciado es *Verdadero* o *Falso*. Si es Falso, explique por qué o proporcione un ejemplo que lo demuestre.

10.1. Cada antiderivada o primitiva de una función polinómica de *n* grados es una función polinómica de grado *(n+1)*…….

10.2. Si *p(x)* es una función polinómica, entonces *p* tiene exactamente una antiderivada o primitiva cuya gráfica contiene al origen……..

10.3. Si $F(x)$ y $G(x)$ son antiderivadas o primitivas de $f(x)$, entonces $F(x) = G(x) + C$…….

10.4. Si $f'(x) = g(x)$ entonces $\int g(x)\,dx = f(x) + C$…….

10.5. $\int f(x) \cdot g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx$ …….

10.6. La antiderivada o primitiva de $f(x)$ es única…….

11. Halle la función $f(x)$ del integrando teniendo en cuenta la primitiva $F(x)$ dada

11.1. $\int \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\ dx = sen^2\, x + \mathrm{C}$

11.2. $\int \ldots\ldots\ldots.\ dx\ + \int \ldots\ldots\ldots.\ dx\ = x^3 + 4\,x + \mathrm{C}$

11.3. $\int \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\ dx = ln^2 x + \cos x + \mathrm{C}$
