MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACIÓN
Universidad Nacional de San Juan

FACULTAD DE INGENIERÍA

Departamento de Matemática

Cátedra: CÁLCULO I – ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Autoría: Equipo de cátedra - 2021

TEMA 5
INTEGRALES INDEFINIDAS
CALCULO DE PRIMITIVAS

5.1 – Introducción

En el tema 3 y 4 se abordó el problema de *Dada una función f encontrar su derivada f´* lo que constituye el cálculo diferencial. En este capítulo se inicia el estudio del cálculo integral, es decir, se trabajará con integrales.

Todas las operaciones en matemática tienen su inversa. Por ejemplo, de la suma es la resta, de la multiplicación es la división, etc. Toda operación que se realice debe poder deshacerse, esto es útil en la resolución de ecuaciones. Dada una función, puede considerarse que la misma proviene de derivar otra función, a la que se denomina primitiva o antiderivada de aquella. Es de especial interés abordar el problema de *Dada una función f encontrar su primitiva o antiderivada F*.

En este capítulo se considera la integral únicamente como la operación inversa de la derivada, o sea como la antiderivada o cálculo de la primitiva (enfoque del siglo XVIII). Fue Cauchy (1789 - 1857) quien recuperó el sentido geométrico original de la integral como área y su relación con la primitiva. Este enfoque se abordará y ampliará (cálculo de volúmenes, longitudes de arcos, áreas y volúmenes de sólidos de revolución) en el capítulo siguiente.

Es importante poseer un excelente desempeño en la determinación de integrales indefinidas, para lo que es imprescindible memorizar las antiderivadas más corrientes y conocer algunos de los procedimientos más comunes y técnicas sencillas de integración.

5.2 – Integral indefinida. Definición de antiderivada o primitiva

Leibniz utilizó el símbolo $\boxed{\int \ldots\ldots dx}$ para indicar la operación antiderivada respecto de la variable *x*. La operación de encontrar la primitiva de una función *f* se denota como $\int f(x)dx$, y se lee *"integral indefinida de f(x) respecto de x".* La función *f(x)* se denomina integrando.

Definición:

F(x) es una primitiva o antiderivada de la función f(x), si para todo x del dominio de f(x), se verifica que F´(x) = f(x).

Simbólicamente: $\boldsymbol{\int f(x)dx = F(x) \iff F'(x) = f(x) \quad \forall x \in Dom\, f(x)}$

Nótese que *F* es *"una"* primitiva de *f*, en vez de *"la"* primitiva. Para entenderlo se obtiene, por ejemplo, la derivada de las siguientes funciones:

1) $y = x^2 \rightarrow y' = 2\,x$

2) $y = x^2 + 2 \rightarrow y' = 2\,x$

3) $y = x^2 - 3 \rightarrow y' = 2\,x$

Cualquiera de las tres funciones tiene por derivada la misma función

Por lo que al determinar una primitiva para la función $y = 2x$, se puede pensar en cualquier función de la forma: $y = x^2 + C$, siendo *C* una constante real.

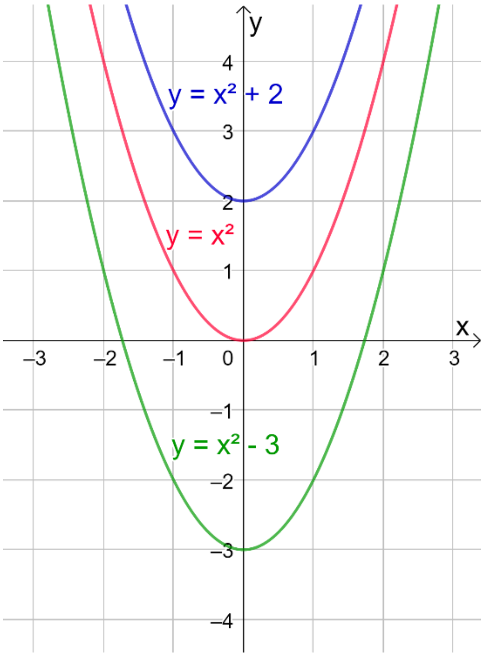

Figura 5.1

Las funciones graficadas son antiderivadas o primitivas de la función dada, siendo sólo una muestra pequeña de las infinitas posibilidades. Se observa que estas funciones a pesar de ser diferentes, difieren en una constante. Por ello se dice que constituyen una familia de funciones. En la Figura 1 se muestran funciones de la familia $y = x^2 + C$. Una función particular de una familia se obtiene dándole un valor a la constante.

5.3 – Teorema fundamental de integrales indefinidas

H) *Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones definidas en el intervalo I, tales que: $f'(x) = g'(x)$ para todo valor x perteneciente al intervalo I.*

T) *Entonces existe una constante C tal que:*

$$f(x) = g(x) + C \quad \forall x \in I$$

*Nótese que el requisito $f'(x) = g'(x)$ supone que ambas funciones son primitivas de una misma función.

Demostración:

Sea *h(x)* una función definida en I mediante:	→	$\mathrm{h(x) = f(x) - g(x)}$ para toda $\mathrm{x} \in \mathrm{I}$
Derivando la función:	→	$\mathrm{h'(x) = f'(x) - g'(x)}$
Por hipótesis: $\mathrm{f'(x) = g'(x)}$ por lo que:	→	$\mathrm{h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0} \quad \forall \mathrm{x} \in \mathrm{I}$
Se sabe que la derivada nula corresponde a funciones constantes, entonces:	→	si $\mathrm{h'(x) = 0} \Rightarrow \mathrm{h(x) = C} \quad \forall \mathrm{x} \in \mathrm{I}$
Reemplazando en la definición de *h(x)* se tiene:	→	$\mathrm{h(x) = f(x) - g(x) = C}$
Por lo que:	→	$\mathrm{f(x) = g(x) + C} \quad \forall \mathrm{x} \in \mathrm{I}$

La operación de resolver $\int f(x)dx$ se denomina integración y da como resultado una familia de funciones de la forma $F(x) + C$ donde C se denomina constante de integración.

Propiedades de la integral indefinida:

Esta nueva operación cumple con la *propiedad de linealidad*, al igual que lo hace la operación de derivar, por lo que cumple que:

- $\int k\, f(x)dx = k \int f(x)dx$ donde *k* es una constante.
- Si *f(x)* y *g(x)* están definidas en el mismo intervalo I, entonces:

$$\int [f(x) \mp g(x)]dx = \int f(x)dx \mp \int g(x)dx$$

5.4 –Reglas básicas de integración

Al integrar se deben encontrar funciones primitivas cuya derivada sea la función integrando. Por lo que a partir de las fórmulas de derivación se pueden obtener fórmulas de integración.

De la simple observación de la tabla de derivadas se puede formar la siguiente **tabla de integrales inmediatas.**

I.	$\int dx = x + C$	II.	$\int k\,dx = k\,x + C$
III.	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad n \neq -1, n\,racional$	IV.	$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{x} dx = ln\|x\| + C$
V.	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{lna} + C \quad a > 0$	VI.	$\int sen\,x\,dx = -\cos x + C$
VII.	$\int \cos x\;dx = sen\,x + C$	VIII.	$\int sec^2 x\,dx = tg\,x + C$
IX.	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctg\,x + C$	X.	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsen\,x + C$
XI.	$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arccos\,x + C$	XII.	$\int sh\,x\,dx = ch\,x + C$
XIII.	$\int ch\,x\,dx = sh\,x + C$	XIV.	$\int \frac{1}{x^2-1} dx = arg\,th\,x + C$

5.5 – Integración inmediata

Con lo expuesto anteriormente se puede resolver integrales aplicando las reglas básicas de integración.

Ejemplo 1: Calcular $\int x^5 dx$.

Si se observa la regla III de integración, se puede afirmar que: $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$.

- Siempre es conveniente realizar la comprobación del resultado de aplicar integración utilizando el concepto de antiderivada. Para eso se deriva el resultado obtenido y debe obtenerse la función integrando.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^6}{6} + C\right) = x^5$$

Ejemplo 2: Calcular $\int \sqrt{x}dx$.

La integral dada debe ser reformulada expresando el radical como potencia para adecuarla a la tabla de integrales inmediatas: $\int \sqrt{x}dx = \int x^{1/2}dx$.

Ahora, utilizando la regla III se obtiene: $\int \sqrt{x}dx = \int x^{1/2}dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$.

Ejemplo 3: Calcular $\int x^{-1}dx$.

La regla III no es posible utilizarla en este caso pues el exponente es $n = -1$. Se expresa la función integrando de otro modo: $\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx$

Esta nueva expresión de la integral responde a la regla IV, luego: $\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = ln\,x + C$.

Ejemplo 4: Calcular $\int \frac{1}{x-2}dx$.

Esta integral no se encuentra en la tabla, pero es evidente que: $\int \frac{1}{x-2}dx = ln(x-2) + C$.

Se puede verificar este resultado derivando (operación inversa): $\frac{d}{dx}(ln(x-2)+C) = \frac{1}{x-2}$.

Este ejemplo es parte de una regla general, que se puede sumar a las anteriormente detalladas.

Regla XV:	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = lnf(x) + C$

Ejemplo 5: Calcular $\int \frac{sen\,x}{2}dx$.

Teniendo en cuenta que: $\int \frac{sen\,x}{2}dx = \int \frac{1}{2}sen\,x\,dx$,

para obtener el resultado final, se aplica la primera propiedad de linealidad e se integra:

$$\int \frac{sen\,x}{2}dx = \int \frac{1}{2}sen\,x\,dx = \frac{1}{2}\int sen\,x\,dx = \frac{1}{2}(-\cos x + C).$$

El resultado de esta integral (como el de muchas otras) genera constantes innecesarias debido a la propiedad distributiva que presenta el producto con la suma:

$$\int \frac{sen\,x}{2}dx = \frac{1}{2}(-\cos x + C) = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}C.$$

Como C es una constante arbitraria se la puede utilizar en lugar de $\frac{C}{2}$, quedando finalmente:

$$\int \frac{sen\,x}{2}\,dx = -\frac{1}{2}\cos x + C$$

Ejemplo 6: Calcular $\int (x + 2x^3 - sen(x) + \sqrt{5x})dx$

Para resolver esta integral se utiliza la propiedad de linealidad:

$$\int (x + 2x^3 - sen(x) + \sqrt{5x})dx = \int x\,dx + 2\int x^3\,dx - \int sen\,x\,dx + \sqrt{5}\int \sqrt{x}\,dx\,,$$

y luego las reglas básicas de integración:

$$\int (x + 2x^3 - sen(x) + \sqrt{5x})dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2} + cos\,x + \frac{2\sqrt{5}}{3}\sqrt{x^3} + C\,.$$

5.6 – Integración por sustitución

Este método se utiliza para integrar funciones compuestas. Consiste en efectuar un cambio de variable, para transformar la integral en otra más sencilla o bien inmediata.

Para ello se tiene en cuenta la regla de la cadena aplicada para obtener la derivada de una función compuesta:

$$\frac{d[F(g(x))]}{dx} = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

y con el concepto de primitiva se obtiene la siguiente regla:

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

Haciendo la sustitución $g(x) = t$, entonces se puede expresar: $d[g(x)] = dt = g'(x)\,dx$.

Reemplazando:

$$\int f\big(g(x)\big)\,g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$$

Cuya última integral es más sencilla de resolver que la original. Se requiere, una vez obtenido el resultado en función de la nueva variable volver atrás con la sustitución aplicada.

$$\int f(t)\,dt = F(t) + C = F\big(g(x)\big) + C$$

Nota: La integral expresada en términos de la variable t por la sustitución no debe contener ninguna expresión en términos de la variable x.

Ejemplo 1: Calcular $\int 3\,sen(3x)dx$.

	Identificación de las funciones involucradas. Planteo de la nueva variable.	Planteo de la nueva integral a resolver	Integración	Deshacer la sustitución
$\int 3\ sen(3x)\ dx =$	$\left\{\begin{array}{c} f(g(x)) \ = \ sen\ 3x \\ t = g(x) \ = \ 3x \\ dt = g'(x)\ dx \ = \ 3\ dx \end{array}\right\}$	$= \int sen\ t\ dt =$	$\cos t + C =$	$\cos(3x) + C$

Podemos verificar el resultado obtenido, derivando el resultado

$$\frac{d}{dx}\left(-\,cos(3x)+C\right)=-(-sen3x)3=3\,sen(3x)$$

En muchos casos la función derivada no se encuentra en el integrando ya sea porque es una constante o porque está incompleta. En estos casos es conveniente utilizar una propiedad del álgebra que expresa “Si se multiplica y divide una expresión por un mismo número la misma no se altera”

Ejemplo 2: Calcular $\int \frac{1}{2x+5}dx$

En este caso: $\left\{\begin{array}{l} f(g(x)) \ = \ \frac{1}{2x+5} \\ t = g(x) \ = \ 2x+5 \\ dt = g'(x)dx = 2dx \end{array}\right\} = \int \frac{1}{2x+5}dx = \int \frac{1}{t}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt = \frac{1}{2}\ln(t) + C$

Convirtiendo a la variable anterior:

$$\int \frac{1}{2x+5}dx = \frac{1}{2}\ln(2x+5) + C$$

La integral puede, también, arreglarse para resolverla de forma inmediata. Teniendo en cuenta la **regla XV** se está en condiciones de decir que:

$$\int \frac{1}{2x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\overbrace{2\,dx}^{du}}{\underbrace{2x+5}_{u}} = \frac{1}{2}\ln(2x+5)+C$$

Ejemplo 3: Calcular $\int \mathrm{e}^{7x}\mathrm{dx}$

Las funciones involucradas son: $f(g(x)) = e^{7x}$, $g(x) = 7x$; $g'(x) = 7$ función constante. Aplicando la propiedad algebraica enunciada anteriormente,

$$\int e^{7x}\,dx = \frac{1}{7}\int 7\,e^{7x}\,dx = \frac{e^{7x}}{7} + C$$

Ejemplo 4: Calcular $\int sen^3 x \cos x \, dx$

Tomando en cuenta la función compuesta se define la nueva variable para la sustitución:

$$t = sen\, x \rightarrow dt = \cos x \, dx$$

Reemplazando en la integral, resolviendo aplicando la Regla III y volviendo atrás con la sustitución:

$$\int sen^3 x \cos x \, dx = \int t^3 \, dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{sen^4 x}{4} + C$$

Este ejemplo es parte de una regla general, que se puede sumar a las anteriormente detalladas.

Regla XVI: $\int f^n(x) f'(x) \, dx = \dfrac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C$ *n:* constante real distinta de (-1)

Este resultado se puede verificar teniendo en cuenta la definición de primitiva:

$$D\left[\frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C\right] = f^n(x) \cdot f'(x)$$

5.7 – Integración por partes

Este método es una técnica importante de integración y puede aplicarse a una amplia variedad de funciones. Es particularmente útil para integrar producto o cocientes de funciones algebraicas o trascendentes que no respondan a las formas estudiadas anteriormente.

Si *u = u(x)* y *v = v(x)* son dos funciones derivables, tenemos que: $\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$

Demostración:

De la regla de derivación de un producto de funciones obtenemos:

$$\frac{d(u\, v)}{dx} = \frac{du}{dx} v + u \frac{dv}{dx}$$

Se multiplican ambos miembros, de la expresión anterior, por *dx* y resulta:

$$d(u\, v) = du\, v + u\, dv$$

Se integran ambos miembros respecto de *x*

$$\int d(u\, v) = \int v\, du + \int u\, dv$$

Teniendo en cuenta que la integral es la antiderivada:

$$u\, v = \int v\, du + \int u\, dv$$

y despejando el segundo término del segundo miembro se obtiene:

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

Notas:

- La expresión $\int u\;dv$ debe corresponderse con el total de la integral a resolver.
- El *dv* de la expresión debe contener siempre al *dx*.
- Haciendo una elección apropiada de *u* y *dv*, la fórmula anterior expresa la integral a resolver en términos de otra integral que puede resultar más fácil de integrar. Si la nueva integral fuera más complicada que la integral dada, probablemente la selección hecha no ha sido la más adecuada.
- Cuando el integrando es un producto de dos funciones, tomar como *dv* la porción más complicada del integrando que se ajuste a una regla básica de integración. Sino tomar como *u* la porción del integrando cuya derivada simplifica la expresión.
- Este método es aplicable a integrales de funciones trascendentes con derivada algebraica.

Ejemplo 1: Calcular $\int ln\,x\,dx$

Si se elige $u = ln\;x,\; dv = dx$ y se efectúan las operaciones de derivación e integración como se indica a continuación,

$$\begin{array}{l} u = ln\,x \;\xrightarrow{\;diferenciando\;}\; du = \dfrac{1}{x} \\ dv = dx \;\xrightarrow{\;integrando\;}\; v = x \end{array} \qquad (1)$$

se puede aplicar la fórmula de integración por partes $\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$

$$\int ln\,x\,dx = ln\,x\,x - \int x\frac{1}{x}dx = ln\,x\,x - \int dx = ln\,x.x - x = x(ln\,x - 1) + C$$

Ejemplo 2: Calcular $\int arctg(\,x\,).dx$

Consideremos

$$\begin{array}{l} u = arctg\,x \;\xrightarrow{\;diferenciando\;}\; du = \dfrac{1}{1+x^2} \\ dv = dx \;\xrightarrow{\;integrando\;}\; v = x \end{array}$$

aplicamos la fórmula de integración por partes: $\int arctg\,x\,dx = arctgx\,x - \int x\,\dfrac{1}{1+x^2}\,dx$

Para evaluar la última integral, vemos que en el denominador está $1+x^2$ y en el numerador x dx o sea en este último falta un 2 para que sea la diferencial de $1+x^2$ o sea:

$$\int \frac{x.dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1+x^2)}d(1+x^2) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

$$\text{luego} \quad I = x.arctg(x) - \frac{1}{2}ln(1+x^2) + C$$

5.8 – Integración de potencias de algunas funciones trigonométricas

Este tipo de integrales se resuelven usando las identidades indicadas en la tabla siguiente

Potencias pares	Potencias Impares
$\int sen^{2n}x\,dx = \int \left(\frac{1-cos2x}{2}\right)^n dx$	$\int sen^{2n+1}x\,dx = \int (1-cos^2x)^n \cdot sen\,x\,dx$
$\int cos^{2n}x\,dx = \int \left(\frac{1+cos2x}{2}\right)^n dx$	$\int cos^{2n+1}x\,dx = \int (1-sen^2x)^n \cdot cos\,x\,dx$

Ejemplo 1:

$$\int sen^2x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{sen\,2x}{2}\right] + C$$

Ejemplo 2:

$$\int sen^4x\,dx = \int \left(\frac{\text{1-cos2x}}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right)dx = \frac{1}{4}\left[x - 2\frac{sen\,2x}{2} + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}sen\,4x\right]$$

$$\int sen^4x\,dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}sen\,2x + \frac{1}{32}sen\,4x + C$$

5.9 – Integración de funciones racionales

En esta sección se estudia un procedimiento para descomponer una función racional en funciones más simples del tipo de fracciones simples, a las cuales es posible aplicar las fórmulas de integración básicas. Se conoce este método como el método de las fracciones simples. Esta técnica fue introducida por John Bernoulli, matemático suizo (1667-1784).

La integración de una función racional, después de separar la parte entera si es que es impropia, se reduce a la integración de una fracción racional propia $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Donde *P(x)* y *Q(x)* son polinomios enteros y el grado de *P(x)* es menor que el grado del polinomio *Q(x).*

Si *Q(x)* tiene raíces reales distintas $a, \ldots, l$ y $\alpha, \ldots, \lambda$ son números naturales (grado de multiplicidad de las raíces), la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ podrá descomponerse en fracciones simples:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \ldots + \frac{L_1}{x-l} + \frac{L_2}{(x-l)^2} + \ldots + \frac{L_\alpha}{(x-l)^\lambda}.$$

Para calcular los coeficientes indeterminados A_1, A_2, ...,L_λ ambas partes de la identidad anterior se reducen a la forma entera y, después, se igualan los coeficientes de cada una de las potencias iguales de la variable *x* (Método de los Coeficientes Indeterminados). También se pueden calcular estos coeficientes dando valores a x debidamente elegidos, esta será la forma en que se trabajará a continuación.

Nótese que se presentan dos situaciones diferentes dentro del mismo tema: una cuando las raíces del polinomio denominador tienen grado de multiplicidad 1 **(raíces reales y distintas)** donde los denominadores aparecerán elevados a la unidad y la otra cuando el grado de multiplicidad de las mismas es mayor a 1 **(raíces reales múltiples)** en cuyo caso los denominadores aparecerán en potencias iguales y decrecientes a los grados de multiplicidad.

Ejemplo 1: $\int \frac{2x^3+x^2-7x+7}{x^2+x-2}\,dx$

Se toma una función racional *f(x)* = $\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{2x^3+x^2-7x+7}{x^2+x-2}$

Dividiendo se expresa este cociente como suma de una parte entera y una fracción racional propia

$$\frac{N(x)}{D(x)} = 2x-1+\frac{-2x+5}{x^2+x-2}$$

Ahora se procede a descomponer la expresión racional propia en fracciones simples, para ello se necesita conocer las raíces del polinomio del denominador

$$D(x) = x^2 + x - 2 = 0 \qquad x = 1,\ x = -2$$

Conociendo estas raíces (**raíces reales con grado de multiplicidad 1**), se construyen las fracciones racionales simples correspondientes

$$\frac{-2x+5}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

Para determinar los coeficientes A y B se reducen ambas partes a la forma entera sacando común denominador en el segundo miembro

$$\frac{-2x+5}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{x^2+x-2}$$

Observando el primer y último miembro de la expresión anterior se ve que los denominadores son iguales por lo que igualamos los numeradores

$$-2x+5=A(x-1)+B(x+2)$$

Tomando valores para x que faciliten los cálculos, estos son las raíces del polinomio denominador, $x = 1$, $x = -2$. Se reemplaza en la igualdad anterior determinando así los valores de A y B.

Para calcular A se hace $x = 1$

$$-2(1)+5=A((1)-1)+B((1)+2)$$
$$3=3B$$
$$B=1$$

Para calcular B se hace $x = -2$

$$-2(-2)+5=A((-2)-1)+B((-2)+2)$$
$$9=-3A$$
$$A=-3$$

De esta manera se completa el trabajo de descomposición en fracciones simples

$$\frac{-2x+5}{x^2+x-2}=\frac{-3}{x-1}+\frac{1}{x+2}$$

La función racional queda expresada en una parte entera $2x-1$ mas dos fracciones simples con sus coeficientes determinados $\frac{-3}{x-1}+\frac{1}{x+2}$

$$\frac{N(x)}{D(x)}=\frac{2x^3+x^2-7x+7}{x^2+x-2}=2x-1+\frac{-2x+5}{x^2+x-2}=2x-1+\frac{-3}{x-1}+\frac{1}{x+2}$$

Ahora se está en condiciones de integrar $\int\frac{N(x)}{D(x)}dx=\int\frac{2x^3+x^2-7x+7}{x^2+x-2}dx=$

$$=\int\left(2x-1+\frac{-3}{x-1}+\frac{1}{x+2}\right)dx=\int(2x-1)dx+\int\frac{-3}{x-1}dx+\int\frac{1}{x+2}dx=$$

$$\boxed{=x^2-x-3\ln|x-1|+\ln|x+2|+C}$$

Ejemplo 2: $\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}\,dx$

Se tiene una función racional f(x) = $\frac{N(x)}{D(x)}=\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}$, se observa que el grado del polinomio del numerador es menor que el grado del polinomio del denominador, lo que lleva a tener una función racional propia. En este caso se limita el trabajo a la determinación de las fracciones simples.

Se buscan las raíces del polinomio denominador

$$x^3+2x^2+x=0 \qquad x\left(x^2+2x+1\right)=0 \qquad x=0,\quad x=-1,\quad x=-1$$

La raíz *x=0* tiene grado de multiplicidad 1, la raíz *x=-1* tiene grado de multiplicidad 2, por lo tanto la descomposición en fracciones simples de la función dada toma la forma

$$\frac{N(x)}{D(x)}=\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B_1}{x+1}+\frac{B_2}{(x+1)^2}$$

Para determinar los valores de A, B_1, B_2 se procede de igual manera que en el Ejemplo 1, sacando común denominador en el último miembro de la igualdad anterior

$$\frac{N(x)}{D(x)}=\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B_1}{x+1}+\frac{B_2}{(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+B_1(x)(x+1)+B_2(x)}{(x)(x+1)^2}$$

Los denominadores son iguales, por lo que se trabaja con la igualdad de los numeradores

$$5x^2+20x+6=A(x+1)^2+B_1(x)(x+1)+B_2(x)$$

Para calcular A se hace $x = 0$

$$5(0)^2+20(0)+6=A(0+1)^2+B_1(0)(0+1)+B_2(0)$$
$$6=A$$

Para calcular B_2 se hace $x = -1$

$$5(-1)^2+20(-1)+6=A(-1+1)^2+B_1(-1)(-1+1)+B_2(-1)$$
$$-9=-B_2$$
$$9=B_2$$

Para calcular B_1 se debe tomar cualquier valor real para la variable x, esto se debe a que la raíz *x=-1* tiene grado de multiplicidad 2 por lo que le corresponden dos coeficientes B_2, B_1,

Eligiendo *x=1* por considerar sencillos los cálculos

$$5(1)^2+20(1)+6=A(1+1)^2+B_1(1)(1+1)+B_2(1)$$
$$31=4A+2B_1+B_2$$

Reemplazando los valores de A y B_2 encontrados anteriormente obteniendo así el coeficiente buscado

$$31=24+2B_1+9$$
$$B_1=-1$$

La función racional propia queda expresada como suma de tres fracciones simples con sus coeficientes determinados

$$\frac{N(x)}{D(x)}=\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}=\frac{6}{x}+\frac{-1}{x+1}+\frac{9}{(x+1)^2}$$

De donde integrando

$$\int\frac{N(x)}{D(x)}dx=\int\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}dx= \;=\int\left(\frac{6}{x}+\frac{-1}{x+1}+\frac{9}{(x+1)^2}\right)dx=\int\frac{6}{x}dx-\int\frac{1}{x+1}dx+\int\frac{9}{(x+1)^2}dx=$$

$$=6ln|x|-ln|x+1|+9\frac{(x+1)^{-1}}{-1}+C=6ln|x|-ln|x+1|-\frac{9}{x+1}+C$$

Nota: Es necesario hacer tantas sustituciones de *x* como coeficientes indeterminados existan.
En el final de esta sección se analiza el trabajo que se realiza para transformar una función racional propia con la característica de tener el polinomio denominador factorizado.

5.10 – Integración de algunas funciones irracionales

Este tipo de integrales se resuelve mediante sustituciones adecuadas a cada caso, se ven algunos casos.

Caso 1: $\displaystyle\int\frac{1}{(x-3)\sqrt{x-2}}dx$

Para este tipo de denominador la sustitución adecuada es: $\sqrt{x-2}=t$

Para reescribir la integral dada en función de la nueva variable *t* se parte de la sustitución elegida y se despeja *x*

$$\sqrt{x-2}=t$$
$$x-2=t^2$$
$$x=t^2+2$$

Diferenciando la expresión de *x* se obtiene $dx = 2t\,dt$.

Reemplazando en la integral se obtiene

$$\int \frac{1}{(t^2-1)t} 2t\,dt = \int \frac{2}{(t^2-1)}\,dt$$

La integral en función de *t*, luego de un pequeño trabajo algebraico, se transforma en una integral inmediata.

$$\int \frac{1}{(t^2-1)t} 2t\,dt = \int \frac{2}{(t^2-1)}\,dt = \int \frac{2}{(-1)(1-t^2)}\,dt = -2\int \frac{1}{(1-t^2)}\,dt = -2\,arctght + C$$

Teniendo en cuenta la sustitución elegida se escribe el resultado en función de la variable original *x*

$$\int \frac{1}{(x-3)\sqrt{x-2}}\,dx = \int \frac{1}{(t^2-1)t} 2t\,dt = -2\,arctght + C = -2\,arctgh\sqrt{x-2} + C$$

Caso 2: Resuelva $\int \sqrt[3]{(x+1)^2}\,dx$

Si bien esta integral corresponde al tipo estudiado en este apartado, la forma de resolverla ya se estudió anteriormente.

Nota: El resultado es $\frac{3}{5}\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^5 + C$

Caso 3: $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ donde *a* es un número real

En este caso la sustitución adecuada es: *x = a sen t*, diferenciando se obtiene *dx = a cos t dt* .

Sustituyendo en la integral dada

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int \sqrt{a^2 - (a\,sent)^2}\;a\cos t\,dt$$

Trabajando algebraicamente se obtiene una integral inmediata.

En primer lugar se saca factor común *a* del radicando

$$\int \sqrt{a^2-(a\,sent)^2}\;a\cos t\,dt = \int \sqrt{a^2\left(1-(sent)^2\right)}\;a\cos t\,dt = \int a\sqrt{\left(1-(sent)^2\right)}\;a\cos t\,dt =$$

$$= a^2\int \sqrt{\left(1-(sent)^2\right)}\;\cos t\,dt = a^2\int (\cos t)^2\,dt = a^2\int \cos^2 t\,dt$$

La última integral es una integral trigonométrica cuyo resultado es:

$$\frac{a^2}{2}\left[t + \frac{sen2t}{2}\right] + C$$

Para finalizar se vuelve a la variable original, trabajo que demandará algunos conocimientos previos de funciones trigonométricas

La sustitución usada *x = a sen t*, permite escribir $t = arcsen\frac{x}{a}$ y recordando que:

sen 2t = 2 sen t cos t , se puede reescribir el resultado obtenido de la siguiente manera.

$$I = \frac{a^2}{2}\left[t + \frac{sen 2t}{2}\right] + C = \frac{a^2}{2}\left[t + \frac{2 sent \ \cos t}{2}\right] + C = \frac{a^2}{2}\left[t + sent \ \sqrt{1 - sen^2 t}\right] + C =$$

$$\frac{a^2}{2}\left[arcsen x + \frac{x}{a}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\right] + C$$

Observación: El mismo trabajo se puede realizar con la sustitución *x = a cos t.*

Bibliografía de referencia

- ***CÁLCULO 1 DE UNA VARIABLE*** (novena edición)- Ron Larson & Bruce H. Edwards. McGraw Hill, 2010.
- ***CÁLCULO. Trascendentes tempranas*** (cuarta edición)- Dennis G. Zill &Warren S. Wright. McGraw Hill, 2011.
- ***CÁLCULO DE UNA VARIABLE. Trascendentes tempranas*** (sexta edición)- James Stweart. Cengage Learning, 2008.