MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACIÓN

Universidad Nacional de San Juan

FACULTAD DE INGENIERÍA

Departamento de Matemática

Cátedra: CÁLCULO I – ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Autoría: Equipo de cátedra - 2023

TEMA 1
FUNCIONES REALES

1 - Funciones Reales de una variable real

1.1 - Variables y constantes

En lo que sigue se debe distinguir entre variables y constantes. Existen fenómenos en los cuales algunas magnitudes varían, es decir, alteran su valor numérico; estas son magnitudes variables o simplemente variables, y otras magnitudes mantienen el mismo valor. A éstas, se les denomina constantes.

Definición:

Variable *es un símbolo que representa indistintamente a cada uno de los elementos (números) de un conjunto. Este conjunto se denomina* **dominio** *o campo de variabilidad o de existencia de la variable y cada elemento del conjunto es un valor de la misma*

Ejemplo: Sea x una variable cuyo dominio o campo de variación es el conjunto $\{2; 4; 6; 8; 10\}$; entonces x puede tomar los valores 2; 4; 6; 8; 10. Es decir, x puede reemplazarse en este caso por cualquier entero positivo par, menor que 11.

La variable se llama natural, racional, real o compleja, según lo sean sus valores. En este curso, en general, se tratan **variables reales**. El análisis y estudio se limita al tratamiento de funciones reales de una variable real.

Notación*:** Las variables se designan con las últimas letras del abecedario: ***x, y, z, ***u,...,*** *y*. Las constantes con las primeras ***a, b, c,...,*** etc.

1.2 - Función Real

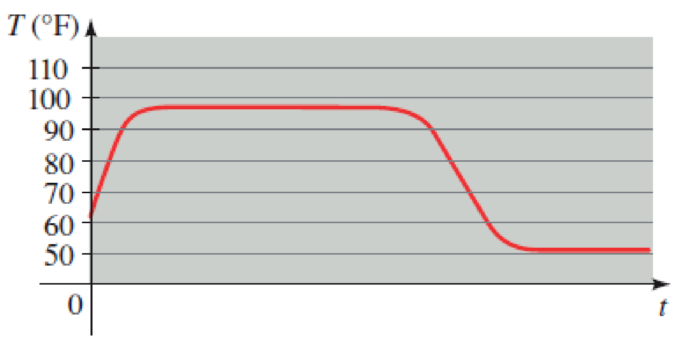
Del estudio de diversos fenómenos físicos y de la resolución de problemas técnicos, y por consiguiente matemáticos, surge la necesidad de examinar la variación de la magnitud de una variable en relación con la variación de otra. Es decir, muchas veces dos variables están relacionadas entre sí de modo que a cada valor de una de ellas corresponde un valor de la otra. Esta relación causa-efecto es la que define una función tal como las presentaremos.

Una **función es una regla**, o una correspondencia, que relaciona dos conjuntos de tal manera que a cada elemento **x** del primer conjunto A corresponde uno y solo un elemento del segundo conjunto B, llamado **y**.

Podría decirse que la funciones modelan situaciones reales.

Por ejemplo, cuando se abre la llave del agua caliente, la temperatura del agua depende del tiempo que el agua haya estado corriendo. La temperatura del agua es una función del tiempo.

En la figura 1.1 se muestra una gráfica aproximada de la temperatura *T* del agua como una función del tiempo *t* que ha trascurrido desde que se abrió la llave. En la gráfica se muestra que la temperatura inicial del agua es cercana a la temperatura ambiente. Cuando el agua del depósito de agua caliente llega a la llave, la temperatura *T* del agua se incrementa con rapidez. En la fase siguiente, *T* es constante a la temperatura del agua en el depósito. Cuando se vacía el deposito, *T* disminuye a la temperatura del suministro de agua fría.



Grafica de la temperatura T del agua como una función del tiempo t

Figura 1.1

Por lo general, se consideran funciones para las cuales los conjuntos A y B son conjuntos de números reales. El símbolo ***f(x)*** se lee “f de x” o “f en x” y se llama el **valor de *f* en *x***, o **la imagen de *x* bajo *f***. El conjunto A se llama **dominio de la función**. **El rango de *f*** es el conjunto de los valores posibles de *f(x)* cuando x varia a través del dominio.

El símbolo que representa un número arbitrario en el dominio de una función $\boldsymbol{f}$, se llama **variable independiente**. El símbolo que representa un número en el rango de $\boldsymbol{f}$, se llama **variable dependiente**. Así, si se escribe $\boldsymbol{y = f(x)}$, entonces $\boldsymbol{x}$, es la variable independiente e $\boldsymbol{y}$, es la variable dependiente.

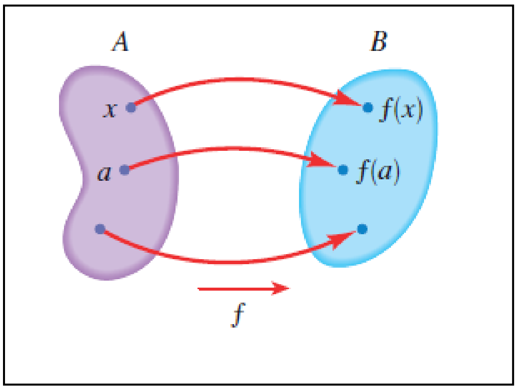


Figura 1.2

Definición de variable independiente:

*Una variable independiente es aquella cuyo valor no depende de otra variable. La variable independiente en una función se suele representar por **x**. La variable independiente se representa en el eje de abscisas.*

Definición de variable dependiente:

La variable dependiente es aquella cuyo valor depende del valor numérico de la variable independiente en la función. Así, una magnitud, es función de otra cuando el valor de la variable dependiente "depende" de forma exclusiva del valor que evidencia la variable independiente

Definición GENERAL de Función

*Se dice que una variable y es función de otra variable x (dentro de un cierto conjunto **X** llamado dominio o campo de variación de x) cuando a cada valor de x corresponde un valor determinado de y, o varios valores de y.*

La Notación es: Como regla de asignación: $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y}$$

Como conjunto:

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \ y = f(x)\} \qquad \text{ó}$$

$$f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x \in Dom(f)\}$$

> ***Definición de dominio o campo de existencia:***
>
> *Al conjunto de valores de x para el cual la función existe (o está definida) dentro del campo de los reales, se lo denomina* ***campo de existencia natural, o de definición o dominio de la función.***

> ***Definición de imagen o rango***
>
> *Al conjunto correspondiente de valores de y se lo denomina* ***rango o imagen de la función.***

1.3 - Diversas formas de expresar una función

Hay cuatro formas para representar una función, a saber:

1. Descripción verbal.
2. Descripción numérica mediante una tabla de valores.
3. Descripción algebraica, usando para ello una fórmula matemática
4. Descripción gráfica, por medio de la representación de la relación en un sistema coordenado.

Cuatro formas de representar una función

Verbal

Con palabras:

$P(t)$ es la "población del mundo en el instante t"

Relación de la población P y el tiempo t

Algebraica

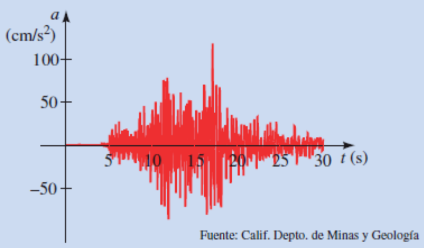
Por medio de una fórmula:

$$A(r) = \pi r^2$$

Área de un círculo

Visual

Por medio de una gráfica:



Aceleración vertical durante un terremoto

Numérica

Por medio de una tabla de valores:

w (onzas)	$C(w)$ (dólares)
$0 < w \leq 1$	0.37
$1 < w \leq 2$	0.60
$2 < w \leq 3$	0.83
$3 < w \leq 4$	1.06
$4 < w \leq 5$	1.29
$\vdots$	$\vdots$

Costo de enviar una carta por correo de primera clase

Figura 1.3

- Descripción mediante una tabla:

En este procedimiento se construye una tabla, en la que se disponen los valores de la variable x en cierto orden x_1, x_2, x_3,...,x_k. De la misma manera, se escriben los valores correspondientes de y.

x	y
x_1	y_1
x_2	y_2
.	.
.	.
x_n	y_n

Este tipo de tablas expresa la dependencia funcional entre ambas variables. Así, por Ejemplo, los datos registrados en una estación meteorológica sobre la temperatura del aire durante un día, se dan en la siguiente tabla:

Tiempo (t)	1	2	3	4	5	6	7
Temperatura (T)	-2	-0,7	1	3	4	5,5	8

Vale decir que una función se puede expresar mediante el conjunto de pares ordenados, cuyas primeras componentes son los valores de *x*. Las segundas componentes son los valores correspondientes de *y*. Así, por Ejemplo, el conjunto de pares ordenados (x,y):

{(1;-2) ; (2;-0,7) ; (3;1) ; (4;3) ; (5;4) ; (6;5,5) ; (7;8)}

Expresa la misma función $T = f(t)$ (Temperatura en función del tiempo) que la tabla ya vista.

Descripción algebraica:

Definición: expresión Analítica:

*Se define por **expresión analítica** a la notación simbólica del conjunto de las operaciones matemáticas conocidas, que se han de realizar en cierto orden con los números y letras que designan magnitudes constantes o variables.*

Ejemplos de expresiones analíticas son:

$$x^4 - 2 \; ; \qquad \frac{\log(x) - sen(x)}{5x^2 + 1} \qquad ; \qquad 2^x - \sqrt{(5+3x)}$$

Si la dependencia funcional $y = f(x)$ es tal que f representa una expresión analítica, se dice que la función está dada analíticamente.

Ejemplos de funciones dadas en forma analítica son:

1) $y = x^4 - 2$; **2)** $y = \dfrac{x+1}{x-1}$; **3)** $y = +\sqrt{1+x^2}$; **4)** $y = sen(x)$; **5)** $Q = \pi r^2$; etc.

Aquí, las funciones están expresadas analíticamente por una sola fórmula (se entiende por fórmula la igualdad de dos expresiones analíticas). En estos casos se puede hallar el dominio natural de definición de la función.

El dominio de una función es el conjunto de las entradas para las que la función está definida. Si la función está dada por una expresión algebraica y el dominio no se enuncia de manera explícita, entonces por convención el dominio de la función es el dominio de la expresión algebraica, es decir, el conjunto de los números reales para los que la expresión se define como un número real.

Así por ejemplo el dominio natural de definición de la función $y = x^4 - 2$ es el intervalo $\infty < x < \infty$, ya que la función está definida o existe para todos los valores *x*.

La función $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ está definida para (-∞ ; 1) U (1 ; +∞), es decir para todos los valores de *x*, menos para *x* = 1, ya que este valor anula el denominador (y la división por cero no está definida). Para la función $y = +\sqrt{(1-x^2)}$, el dominio natural de definición o campo de existencia es $-1 \le x \le 1$, o sea el intervalo cerrado [-1 ; 1].

En el campo de los reales una función no está definida en los siguientes casos:

- **División por cero**
- **Raíz de números negativos con índice par.**
- **Logaritmo de cero**
- **Logaritmo de números negativos**

Descripción gráfica:

La forma más común para visualizar una función es su gráfica.

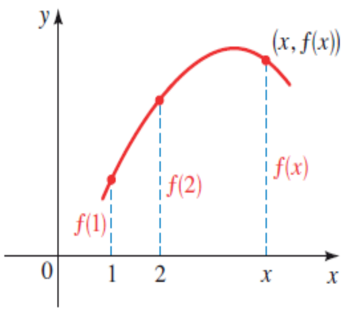


Figura 1.4

La gráfica de una función

Si f es una función con dominio A, entonces la **gráfica** de f es el conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

En otras palabras, la gráfica de f es el conjunto de los puntos (x, y) tales que $y = f(x)$; es decir, la gráfica de f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.

La gráfica de una función *f* da un cuadro del comportamiento o "historia de vida" de la función. Se puede leer el valor de *f(x)* de la gráfica como la altura de la gráfica arriba del punto *x*.

Definición: gráfica de una función:

La gráfica de la función f, es el conjunto G de todos los puntos P(x,y) del plano coordenado, cuyas coordenadas son los pares ordenados (x; y), en el que la segunda componente y es la imagen de la primer componente x a través de f (con x que pertenezca al dominio de la función). $G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in D(f), y = f(x)\}$

Sea la función $y = x^2$, para un cierto valor real de x se obtiene el correspondiente valor de y, se forma un par ordenado. Por ejemplo $(x; y) = (2; 4)$.

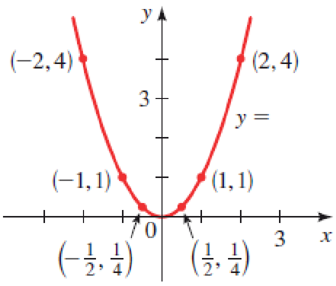


Tabla de valores de los puntos correspondientes:

x	$f(x) = x^2$
0	0
$\pm\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
± 1	1
± 2	4
± 3	9

Figura 1.5

Ahora bien, las coordenadas de un punto en el sistema cartesiano componen un par ordenado y, a su vez, todo par ordenado de números reales constituye las coordenadas de un punto P en el plano. Es decir, existe una correspondencia biunívoca. Luego, es obvio, que para cada x e y, tal que y sea el correspondiente de x a través de $y = f(x)$, se tiene $P(x; y)$ del plano, una vez que se ha fijado el sistema cartesiano de coordenadas.

1.4 - Funciones uniforme y multiforme

Definición de función UNIFORME

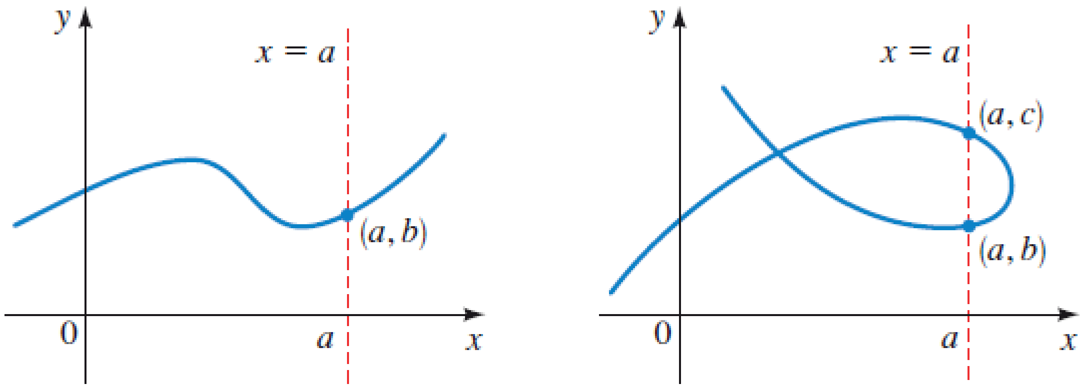
*Se llama **función uniforme o univaluada**, cuando a cada valor de x corresponde solo uno de y.*

En cambio, se denomina función MULTIFORME o multivaluada, cuando a cada valor de x corresponden varios valores de y.

La gráfica de una función es una curva en el plano xy. Pero surge la pregunta: ¿qué curvas en el plano *xy* son graficas de funciones uniformes? Esto se contesta mediante la prueba de la línea vertical.

Una curva en el plano coordenado es la gráfica de una función uniforme si y solo si ninguna línea vertical corta la curva más de una vez.

En la figura 1.6 se aplica esta prueba. Si cada línea vertical $x = a$ corta una curva solo una vez en (a, b), entonces $f(a) = b$ define exactamente un valor funcional. Pero si una línea $x = a$ corta la curva dos veces en (a,b) y en (a,c), entonces la curva no puede representar una función uniforme porque una función uniforme asigna un único valor para a.



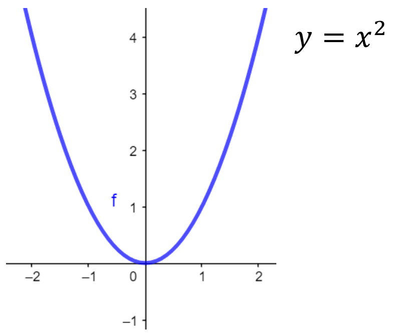
Gráfica de una función uniforme

Gráfica de una función multiforme

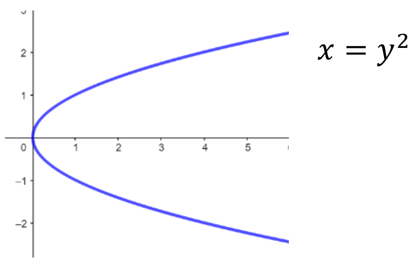
Figura 1.6

Algunos autores, no consideran funciones a las multiformes, para nosotros**, mientras no se advierta lo contrario, <u>con la palabra función se hará referencia exclusivamente a las uniformes.</u>** Esta restricción está justificada, porque el estudio de las funciones multiformes se reduce al de las uniformes, clasificando los valores de y de modo que formen varias funciones uniformes.

Ejemplo: ¿Cuál de las funciones $y = x^2$, $x = y^2$, corresponde a una función uniforme?



Dominio: $\mathbb{R}$, Imagen: $[0, \infty)$ es función uniforme.



$x = y^2$ es función multiforme, $y = \pm\sqrt{x}$, puede descomponerse en las dos funciones: $y = +\sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$; ambas definidas para $x \geq 0$.

Figura 1.7

1.5 - Evaluación de una función

En la definición de una función la variable independiente x desempeña el papel de "marcador de posición". Por ejemplo, la función $f(x) = 3x^2 + x - 5$ se puede considerar si x=a **como:**

$$f(a) = 3a^{\,2} + a - 5$$

Para evaluar *f* en un número, se sustituye el número para el marcador de posición.

a) $f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + (-2) - 5 = 5$
b) $f(0) = 3 \cdot 0^2 + 0 - 5 = -5$
c) $f(4) = 3 \cdot 4^2 + 4 - 5 = 47$
d) $f(\frac{1}{2}) = 3 \cdot (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} - 5 = -\frac{15}{4}$

1.6 - Función definida por partes

Una función por partes se define mediante fórmulas distintas en diferentes partes de su dominio. Como se podría esperar, la gráfica de tal función consiste en trozos separados.

Ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \leq 1 \\ 2x + 1 & si\ x > 1 \end{cases}$$

Si $x \leq 1$, entonces $f(x) = x^2$, así que la parte de la gráfica a la izquierda de $x = 1$ coincide con la gráfica de $y = x^2$, Si $x > 1$, entonces $f(x) = 2x + 1$ de modo que la parte de la gráfica a la derecha de $x > 1$ coincide con la recta $y = 2x + 1$,

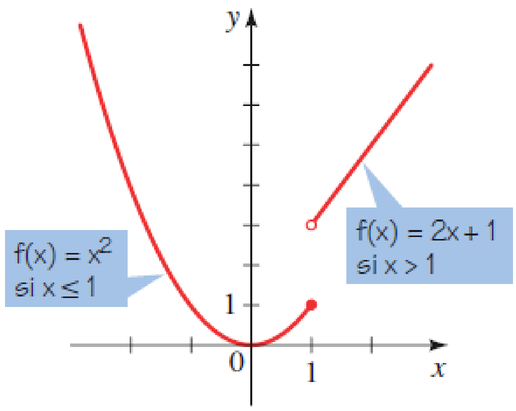


Figura 1.8

2 - Clasificación de las funciones

Existen muchos tipos diferentes de funciones. A continuación, y a efectos de que se logre una visión general de la clasificación de funciones, se muestra un ordenamiento, que puede resultar de utilidad.

Función Algebraica: Son aquellas que pueden expresarse en términos de un número finito de sumas, diferencias, productos, cocientes y potencias.

Función trascendente: Son aquellas funciones que no son algebraicas.

Clasificación de Funciones Expresables Analíticamente

- **Algebraicas**
  - **Polinómicas**
  - **Racionales**
  - **Irracionales o Radicales**
- **Trascendentes**
  - ✓ Exponenciales
  - ✓ Logarítmicas
  - ✓ Valor Absoluto
  - ✓ Trigonométricas

2.1- Funciones Algebraicas

Las funciones algebraicas son aquella que se pueden expresar mediante un numero finito de sumas, diferencias, productos, cocientes y raíces conteniendo potencias x^n , pueden ser:

Polinómicas: Cuando se efectúan sobre la variable *x* solamente operaciones racionales (suma, resta, multiplicación, división y potencia con exponente que son números enteros no negativos), en un número finito de veces.

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

Racionales: Cuando se efectúan sobre la variable *x* solamente operaciones racionales (suma, resta, multiplicación, división y potencia con exponente que son números enteros negativos), en un número finito de veces.

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n}$$

Irracionales o Radicales: Cuando se efectúan operaciones de suma, resta, producto, división y potencia, donde los exponentes sean números racionales no enteros.

Son del tipo:

$$y = \frac{2x^2 + \sqrt{x}}{2 + \sqrt{1 + 5x^2}}$$

A continuación, se analizan las principales funciones que usaremos en todo este curso:

- **Funciones polinómicas de grado n:**

Una función polinómica de grado n es de la forma:

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \quad \text{con;} \quad a_0 \neq 0$$

El grado del polinomio es n, donde n es un número entero no negativo. Los coeficientes a_0, a_1, a_2, ..., a_n son números reales (constantes), siendo a_0 el coeficiente principal. Un polinomio de grado cero es una función constante.

Grado cero:	$y = b$	*Función constante*
Grado uno:	$y = ax + b$	*Función lineal*
Grado dos:	$y = ax^2 + bx + c$	*Función cuadrática*
Grado tres:	$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$	*Función cúbica*
Grado n:	$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$	*Función polinómica de grado n*

- Función de grado cero o función constante

De la forma $y = b$

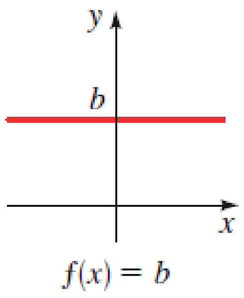


Figura 1.9

Dominio: $\mathcal{R}$

Imagen: $\{y / y = b\}$

ó $\{b\}$

- Función de primer grado o función lineal

$$y = f(x) = a_0x + a_1,$$ **donde a_0 y a_1 son constantes reales**

En las funciones lineales, se usará el coeficiente lineal **a_0** como **m**, y a_1 como b. Este tipo de funciones son las más sencillas, y forman una de las más importantes clases. **El gráfico de una función lineal es una recta.**

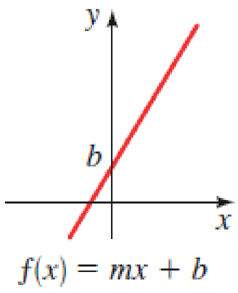


Figura 1.10

Dominio: $\mathcal{R}$; Imagen: $\mathcal{R}$

$\boxed{f(x) = y = mx + b \textbf{, donde } m \textbf{ y } b \textbf{ son constantes y } m \neq 0.}$

m=pendiente de la recta

b= ordenada al origen.

P(0; b) es el punto de intersección con el eje de ordenadas **y.**

- *Función de segundo grado o función cuadrática*

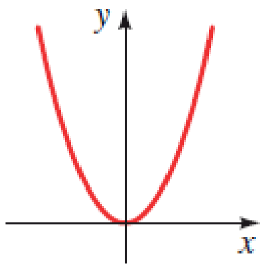
$$\boldsymbol{y = f(x) = ax^2 + bx + c \qquad a, b, c \text{ números reales}; \quad a \neq 0}$$

Dominio: $\mathcal{R}$

Imagen: **Si a >0 Imagen: [y_v,∞)** **Si a <0 Imagen: (-∞,y_v]** **y_V : coordenada y del vértice**

En particular, si se toma a = 1 y b = c = 0, se obtiene la función cuadrática simple $y = x^2$.

La gráfica de la función cuadrática es una parábola

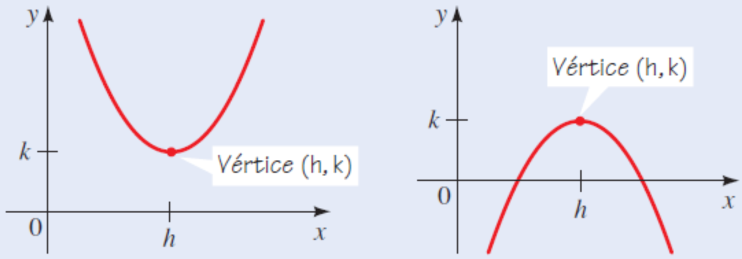


$f(x) = x^2$

Una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se puede expresar en la **forma estándar**

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

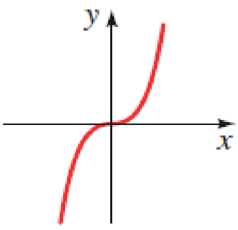
completando el cuadrado. La gráfica de f es una parábola con **vértice** (h, k); la parábola se abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$.



$f(x) = a(x - h)^2 + k, \ a > 0$ $\qquad$ $f(x) = a(x - h)^2 + k, \ a < 0$

Figura 1.11

- *Función de tercer grado: $y = ax^3$*



$f(x) = x^3$

Dominio: $\mathcal{R}$

Imagen: $\mathcal{R}$

Figura 1.12

Dentro de las funciones polinómicas podemos clasificar a las **funciones potenciales o función simple de grado n:**

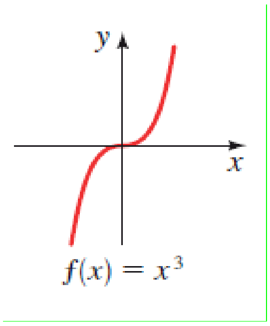
$\boldsymbol{f(x) = x^a}$ **, donde a es una constante.**

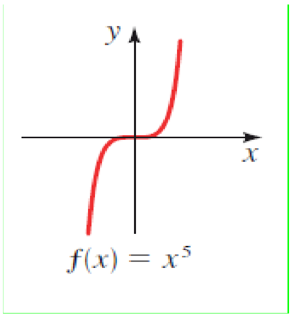
Consideraremos varios casos:

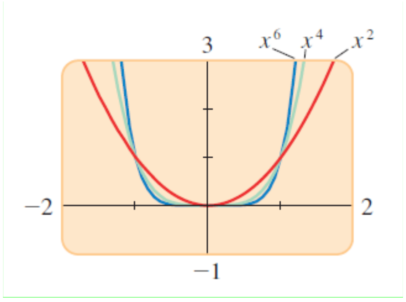
a) **a = n, donde n es un número entero positivo:** En este caso, la función está definida en el intervalo

$-\infty < x < +\infty$. Se muestran gráficas con distintos valores de n:

La forma general de la gráfica de $\boldsymbol{f(x) = x^n}$ **depende de si n es par o impar.**







Dominio: $\mathcal{R}$

Imagen: $\mathcal{R}$

Dominio: $\mathcal{R}$

Imagen: $\mathcal{R}$

Dominio: $\mathcal{R}$

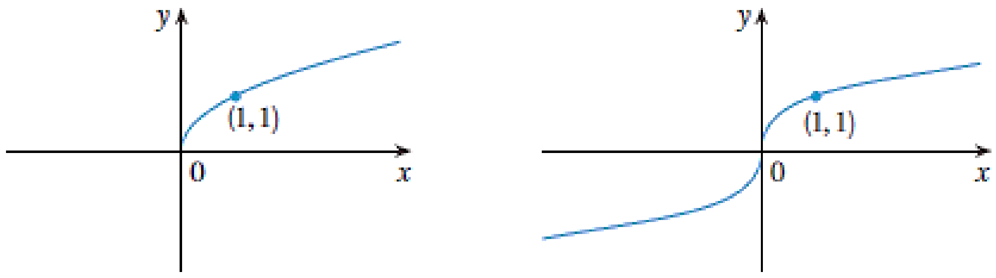
Imagen: $\{\mathbf{y/y \geq 0}\}$

Figura 1.12

Si n es par, la gráfica es similar a la de $y = x^2$, mientras que, si n es impar, la gráfica es semejante a la de $y = x^3$. Sin embargo observe en la Figura 1.12, que conforme aumenta n, la gráfica se hace más plana cerca de cero y más pronunciada cuando $|x| \geq 1$.

b) **a = 1/n , donde n es un número entero positivo:**

La función $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ es una función raíz. Para n = 2 es la función raíz cuadrada, $f(x) = \sqrt{x}$, cuyo dominio es $[0, \infty)$ y cuya gráfica es la mitad superior de la parábola $x = y^2$ (véase la figura siguiente). Para otros valores pares de n, la gráfica de $y = \sqrt[n]{x}$ es semejante a la de $f(x) = \sqrt{x}$. Para n =3 tenemos la función raíz cúbica cuyo dominio es $\mathcal{R}$ (recuerde que todo número real tiene una raíz cúbica) y cuya gráfica se muestra en la Figura (b). La gráfica de $y = \sqrt[n]{x}$ para n impar (n > 3) es semejante a la de $y = \sqrt[3]{x}$.



(a) $f(x) = \sqrt{x}$ (b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

c) a = n, donde n es un número entero negativo:

En este caso la función está definida para todos los valores de x, excepto para $x = 0$.

Es un caso particular, puede considerarse dentro de la clasificación como una función racional, con el polinomio del numerador P(x) de grado 0.

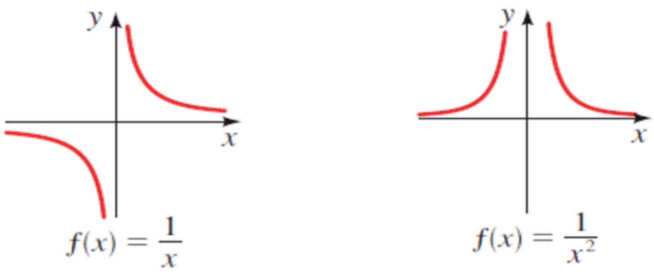


Figura 1.13

Dominio: $(-\infty,0)U(0,+\infty)$ Dominio: $(-\infty,0)U(0,+\infty)$

Imagen: $(-\infty,0)U(0,+\infty)$ Imagen: $\{\mathbf{y/y > 0}\}$

Observación: *la función* $y = \dfrac{1}{x}$ *Se llamada* ***Hipérbola Equilátera***

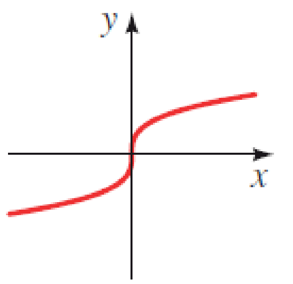
- **Funciones racionales:**

Se llama función racional al cociente de dos polinomios

F(x)= $\boldsymbol{f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}}$ $\boldsymbol{Q(x) \neq 0}$

- **Funciones irracionales o radicales:**

Algunos ejemplos son:



$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

Dominio: $\mathcal{R}$

Imagen: $\mathcal{R}$

$f(x) = x^{\frac{1}{4}}$

Dominio: $[0, \infty)$

Imagen: $\{\mathbf{y/y \geq 0}\}$

Figura 1.14

2.2 - Funciones trascendentes

Son aquellas funciones que no son algebraicas. Por ejemplo:

$$y = e^x\ ;\ y = \cos(x)\ ;\ y = 3\log(x)\ ;\ y = 10^x x\ ;\ \text{etc.}$$

✓ **Función exponencial**

Está dada por la expresión: $\boldsymbol{f(x) = a^x}$ $\quad (\boldsymbol{a > 0\ , a \neq 1})$

Tiene como Dominio al conjunto $\mathcal{R}$ e Imagen $(\mathbf{0}, \infty)$**.** Su gráfica se acerca cada vez más al *eje x* conforme x toma valores positivos cada vez más grandes, pero ningún punto lo toca. Este comportamiento se conoce como ***asintótico*** y el *eje x* es una *asíntota* horizontal para esta función. Se abordarán estos conceptos con mayor profundidad más adelante.

La gráfica de esta función tiene una de las formas siguientes:

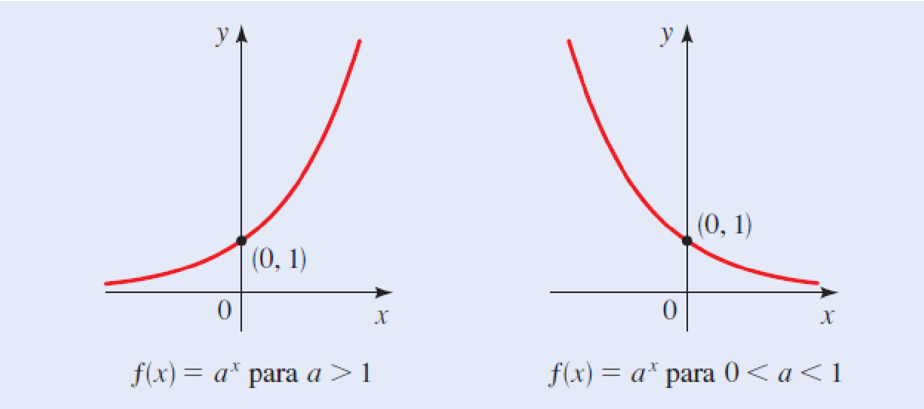


Figura 1.15

En la figura 1.16 se muestran las gráficas de la familia de funciones exponenciales $f(x) = a^x$ para varios valores de la base a. Todas estas graficas pasan por el punto porque $a^0 = 1$ para $a \neq 0$. Se puede ver de la figura que hay dos clases de funciones exponenciales: si $0 < a < 1$, la función exponencial disminuye con rapidez. Si $a > 1$, la función se incrementa rápidamente:

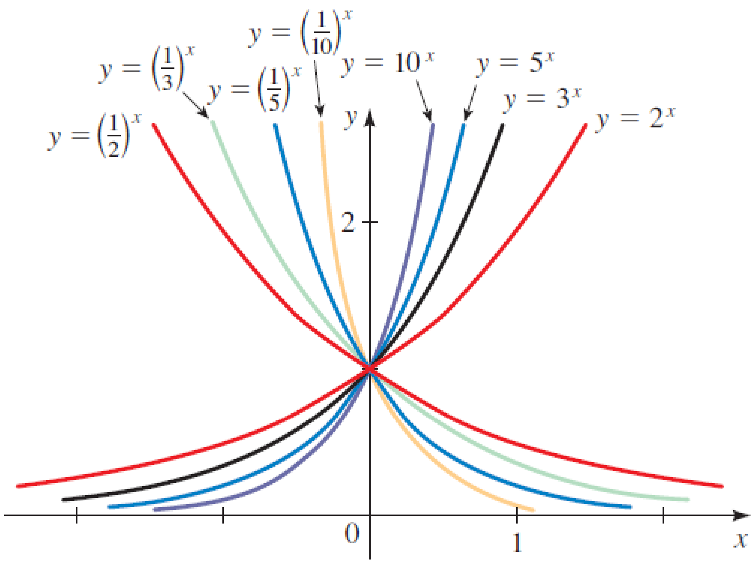


Figura 1.16

La función **exponencial natural** (Figura 1.17) **es la función exponencial:** $\boldsymbol{f(x) = e^x}$, donde la base $a = e \approx 2{,}7182818$ ... habitualmente la bibliografía se refiere a ella simplemente como “***la*** función exponencial”.

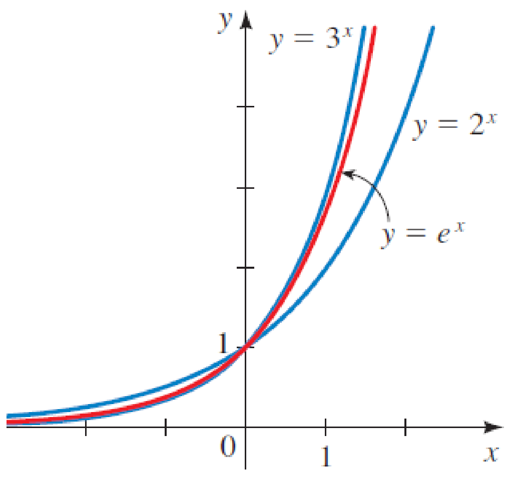


Figura 1.17

Observación: Figura 1.17: Puesto que 2 < e < 3, la gráfica de la función exponencial natural está entre las gráficas de $y = 2^x$ y de $y = 3^x$

✓ Función Logarítmica

Sea a un número positivo con $a \neq 1$. La **función logarítmica con base a**, denotada por $\mathbf{log}_a$, se define

$$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

Así, $\log_a x$ es el *exponente* al que se debe elevar la base a para dar x.

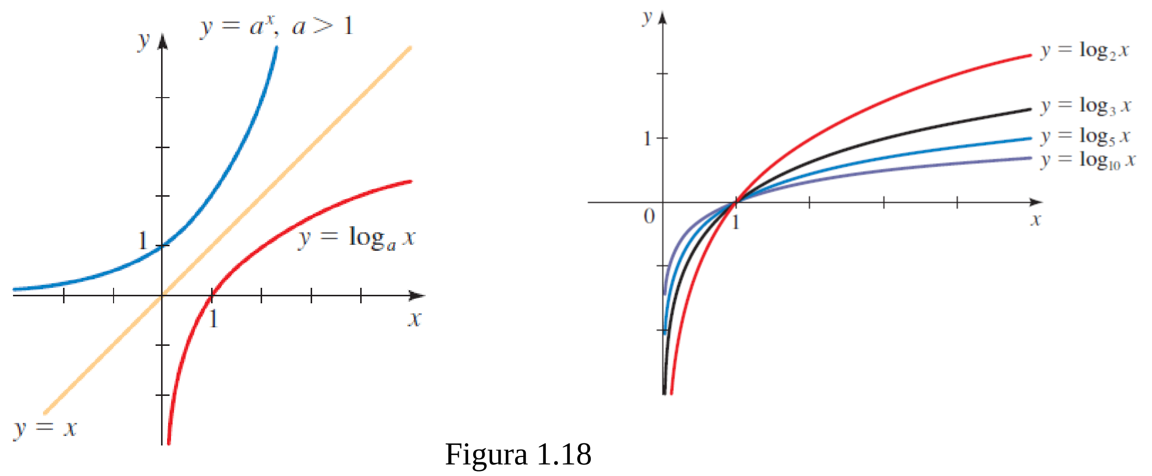


Figura 1.18

✓ Función valor absoluto

Está definida para todo x, o sea en el intervalo (-∞ ; +∞), es decir su Dominio es el conjunto $\mathcal{R}$, y su Imagen $[\mathbf{0}, \infty)$**:**

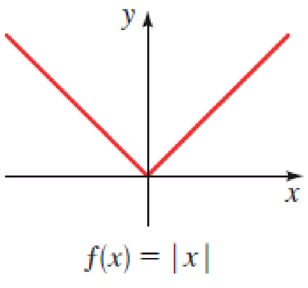


Figura 1.19

✓ Funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas tienen la propiedad de ser periódicas (en el apartado 4.3 se tratan las mismas). Esto significa, geométricamente que su gráfica se repite indefinidamente. Como se ve en la figura 1.20, para la función seno, cada 2π la función vuelve a tomar los mismos valores, bajo las mismas condiciones. En la figura 1.21 se indica la longitud del período de la función coseno.

$f(x) = sen\ \boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{Dominio}: \boldsymbol{R}$ $\boldsymbol{Imagen}: [\boldsymbol{-1}; \boldsymbol{1}]$ $\boldsymbol{Período}: \boldsymbol{2\pi}$

$f(x) = cos\ \boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{Dominio}: \boldsymbol{R}$ $\boldsymbol{Imagen}: [\boldsymbol{-1}; \boldsymbol{1}]$ $\boldsymbol{Período}: \boldsymbol{2\pi}$

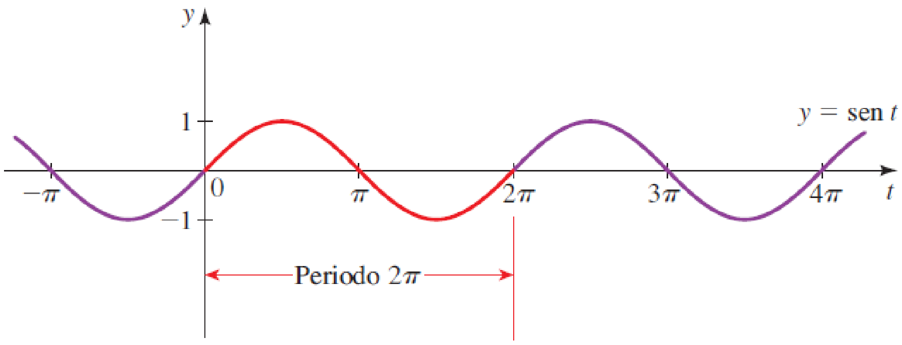


Figura 1.20

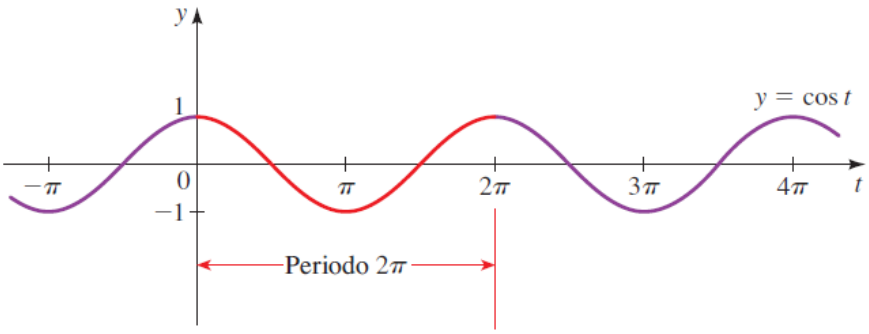


Figura 1.21

$f(x) = y = tg\ \boldsymbol{x}$ **Dominio:** $\left\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}/\boldsymbol{x} \neq (\boldsymbol{2n}+\boldsymbol{1})\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}, \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}\right\}$ **Imagen: R**   **Período=** $\boldsymbol{\pi}$

Las funciones tangente y cotangente tienen periodo π:

$$\tan(x + \pi) = \tan x \qquad \cot(x + \pi) = \cot x$$

Las funciones cosecante y secante tienen periodo 2π:

$$\csc(x + 2\pi) = \csc x \qquad \sec(x + 2\pi) = \sec x$$

En la figura 1.22 a) y b) se observan las gráficas correspondientes a las funciones tangente y cotangente respectivamente. Mientras que en c) y d) pueden verse las gráficas de las funciones cosecante y secante.

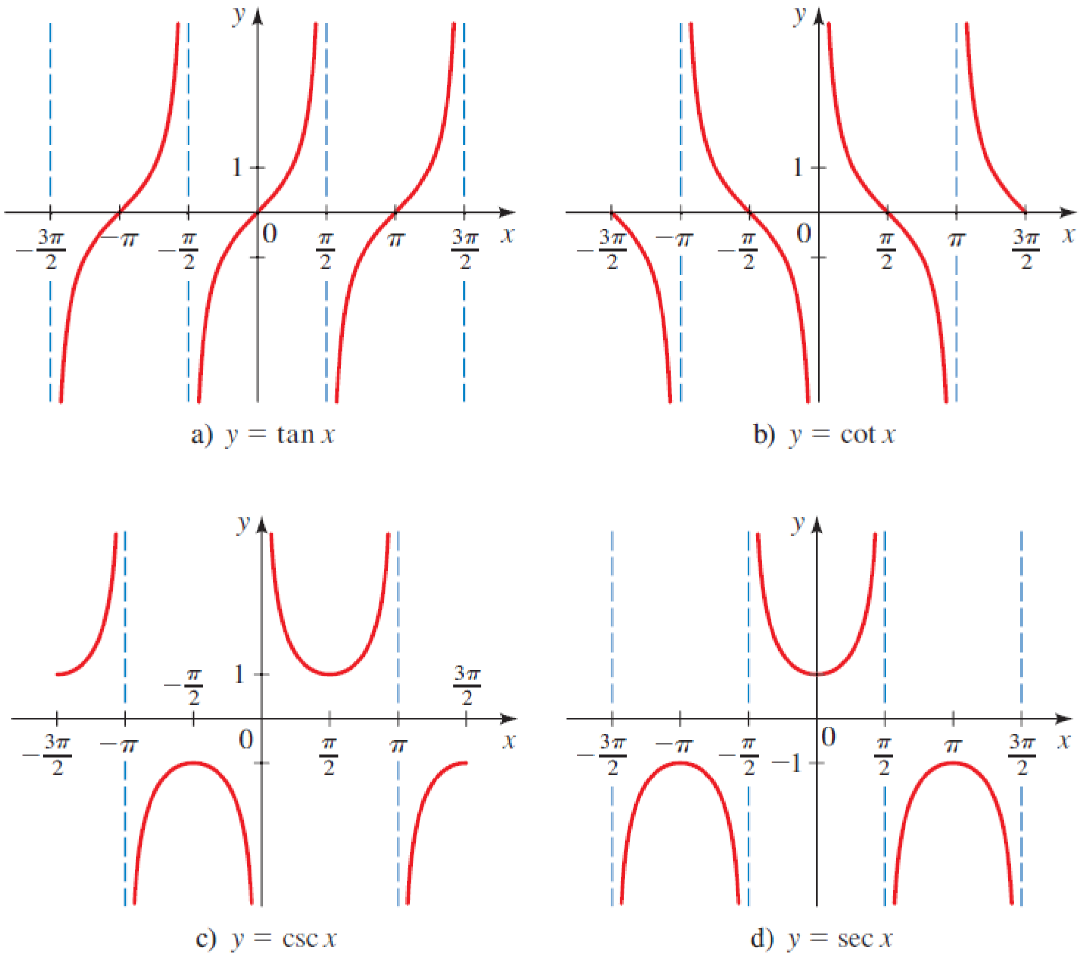


Figura 1.22

Nota: en el **anexo del tema 1** puede encontrarse más detalle de algunas funciones, así como otras funciones particulares de uso en ciertas carreras de ingeniería.

3 - Transformaciones de funciones

En esta sección se estudia como ciertas transformaciones de una función afectan su gráfica. Esto proporciona una mejor comprensión de como graficar funciones. Las transformaciones que se estudian son desplazamiento, reflexión y alargamiento/acortamiento.

3.1 - Desplazamiento vertical

Sumar una constante a una función desplaza su gráfica en dirección vertical: hacia arriba si la constante es positiva y hacia abajo si es negativa.

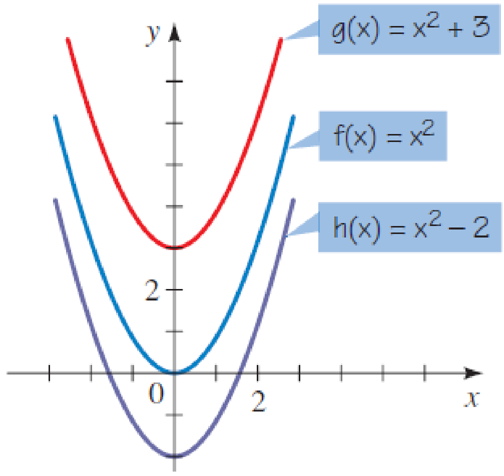


Figura 1.23

Como se observa en la figura anterior, para graficar h se desplaza la gráfica de f hacia abajo dos unidades. En general, suponga que se conoce la gráfica de $y = f(x)$. Como se obtienen de esta las gráficas de $y = f(x) + c$ y $y = f(x) - c$ con (c>0)

La coordenada y de cada punto sobre la gráfica de $y = f(x) + c$ esta c unidades arriba de la coordenada y del punto correspondiente sobre la gráfica de $y = f(x)$ De manera similar, se obtiene la gráfica de $y = f(x) - c$ al desplazar c unidades hacia abajo la gráfica de $y = f(x)$.

Suponga que $c > 0$.

Para graficar $y = f(x) + c$, desplace c unidades hacia arriba la gráfica de $y = f(x)$.

Para graficar $y = f(x) - c$, desplace c unidades hacia abajo la gráfica de $y = f(x)$.

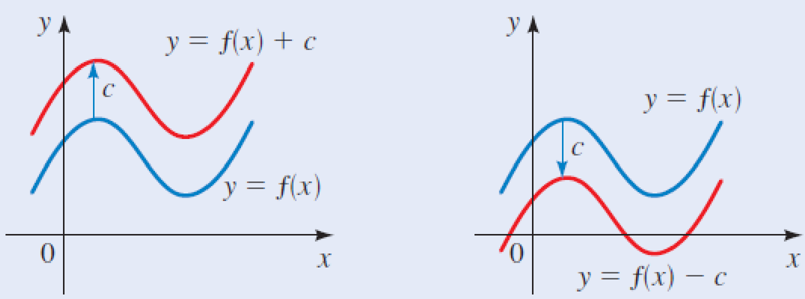


Figura 1.24

3.2 - Desplazamiento horizontal

Sumar una constante a la variable x en una función desplaza su grafica en dirección horizontal, hacia la izquierda si la constante es positiva y hacia la derecha si es negativa.

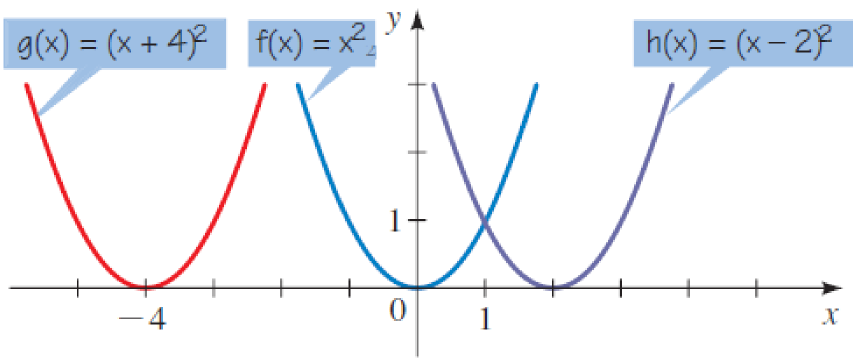


Figura 1.25

Suponga que se conoce la gráfica de $y = f(x)$. Como se emplea para obtener las gráficas de $y = f(x + c)$ y $y = f(x - c)$ con $(c>0)$

Supóngase que $c > 0$.

Para graficar $y = f(x - c)$, desplace la gráfica de $y = f(x)$ a la derecha c unidades.

Para graficar $y = f(x + c)$, desplace la gráfica de $y = f(x)$ a la izquierda c unidades.

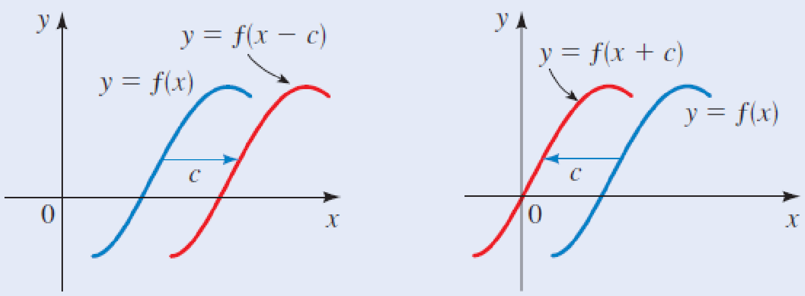


Figura 1.26

El valor de $y = f(x - c)$ en x es el mismo que el valor de $y = f(x)$ en $(x - c)$. Puesto que $(x - c)$ esta c unidades a la izquierda de x, se deduce que la gráfica de $y = f(x - c)$ es la gráfica de $y = f(x)$ desplazada a la derecha c unidades. Con un razonamiento similar se demuestra que la gráfica de $y = f(x + c)$ es la gráfica de $y = f(x)$ desplazada a la izquierda c unidades.

3.3 - Reflexión de gráficas

Suponga que se conoce la gráfica de $y = f(x)$. Como se emplea para obtener las gráficas de $y = -f(x)$ y $y = f(-x)$? La coordenada y de cada punto sobre la gráfica de $y = -f(x)$ es simplemente el negativo de la coordenada y del punto correspondiente en la gráfica de $y = f(x)$ Por lo tanto, la grafica deseada es la reflexión de la gráfica de $y = f(x)$ en el eje x. Por otro lado, el valor de $y = f(-x)$ en x es el mismo que el valor de $y = f(x)$ en -x por consiguiente, la gráfica deseada aquí es la reflexión de la grafica $y = f(x)$ de en el eje y.

Para graficar $y = -f(x)$, refleje la gráfica de $y = f(x)$ en el eje x.

Para graficar $y = f(-x)$, refleje la gráfica de $y = f(x)$ en el eje y.

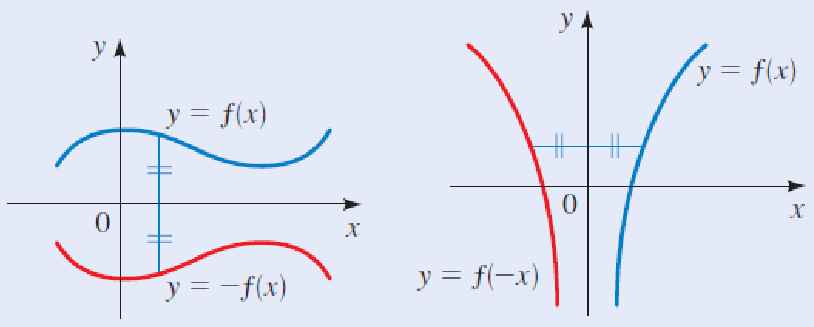


Figura 1.27

3.4 - Alargamiento y acortamiento vertical en las funciones seno y coseno.

Suponga que se conoce la gráfica de $y = f(x)$. Como se usa para obtener la gráfica de $y = c\,f(x)$? La coordenada y de $y = cf(x)$ en x es la misma que la coordenada y correspondiente de $y = f(x)$ multiplicada por c. Multiplicar las coordenadas y por c tiene el mismo efecto de alargar y acortar verticalmente la gráfica por un factor de c, siendo c la amplitud de la curva seno o coseno. Al acortar o alargar verticalmente las funciones seno o coseno, se modifica su imagen.

Para graficar $y = cf(x)$:

Si $c > 1$, alargue verticalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de c.

Si $0 < c < 1$, acorte verticalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de c.

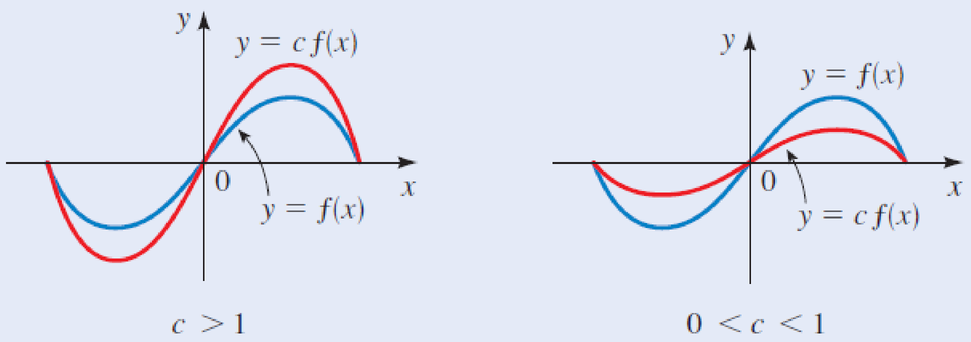


Figura 1.28

3.5- Alargamiento y acortamiento horizontal en las funciones seno y coseno

La gráfica de $y = f(cx)$:

Si $c > 1$, acorte la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente por un factor de $1/c$.

Si $0 < c < 1$, alargue la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente por un factor de $1/c$.

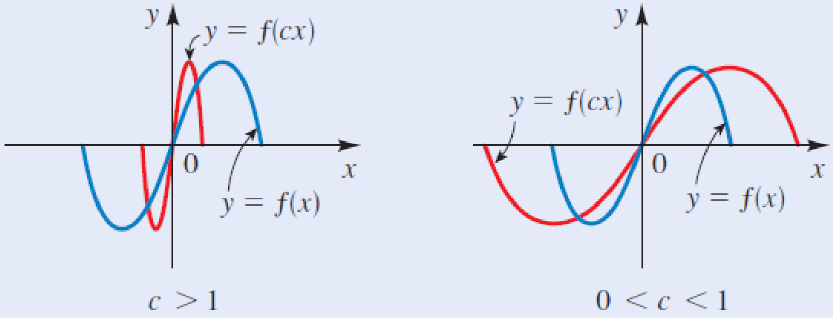


Figura 1.29

Ahora abordaremos el acortamiento y alargamiento horizontal de gráficas. Si se conoce la gráfica de $y = f(x)$, entonces .como se relaciona la gráfica de $y = f(cx)$ con esta? La coordenada y de $y = f(cx)$ en x es la misma que la coordenada y de $y = f(x)$ en cx. Así, las coordenadas x en la gráfica de $y = f(x)$ corresponden a las coordenadas x en la gráfica de $y = f(cx)$ multiplicadas por c. Considerado de otro modo, se puede observar que las coordenadas x en la gráfica de $y = f(cx)$ son las coordenadas x en la gráfica de $y = f(x)$ multiplicada por 1/c. En otras palabras, para cambiar la gráfica de $y = f(x)$ a la gráfica de $y = f(cx)$, se debe acortar (o alargar) la gráfica horizontalmente por un factor de 1/c, como se resume en el cuadro siguiente.

Al acortar o alargar horizontalmente las funciones trigonométricas (seno y coseno), se modifica su período.

En general las funciones $\boldsymbol{y = A.sen(cx)}$; $\boldsymbol{y = A.cos\,(cx)}$ con $\boldsymbol{c > 0}$, tienen amplitud $\boldsymbol{/A/}$ y período $\boldsymbol{T = 2\pi/c}$

- Algunos ejemplos gráficos de funciones con transformación

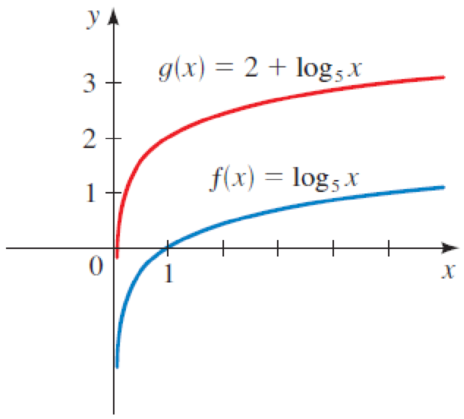


Figura 1.30

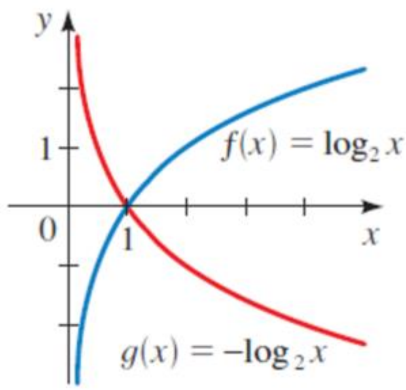


Figura 1.31

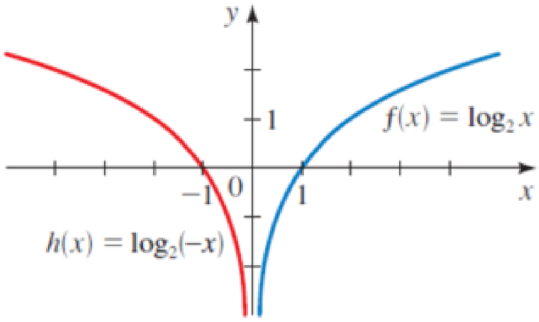


Figura 1.32

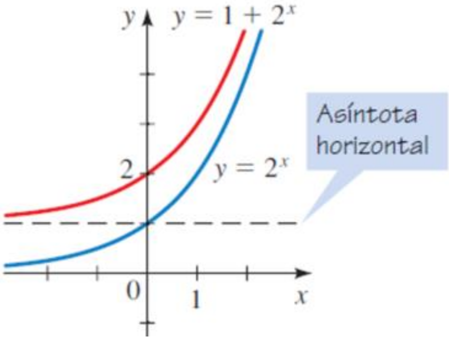


Figura 1.33

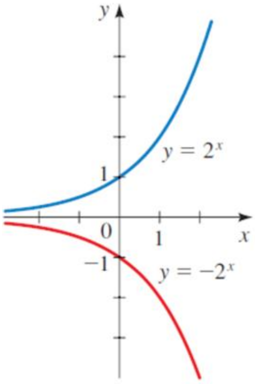


Figura 1.34

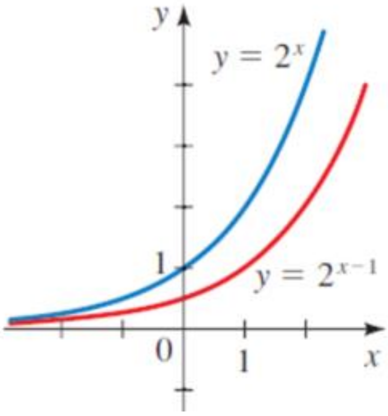


Figura 1.35

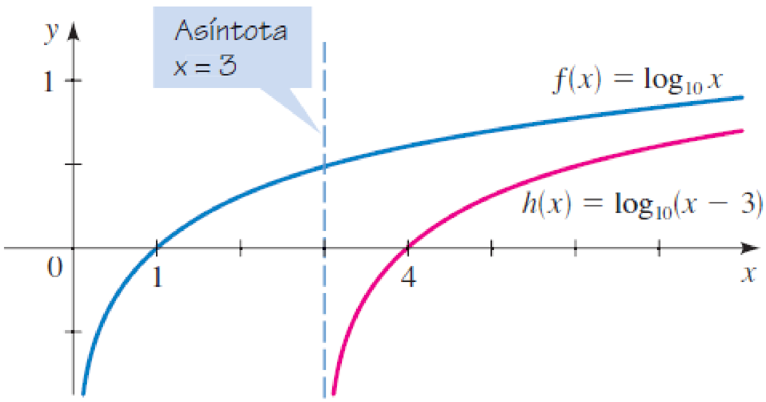


Figura 1.36

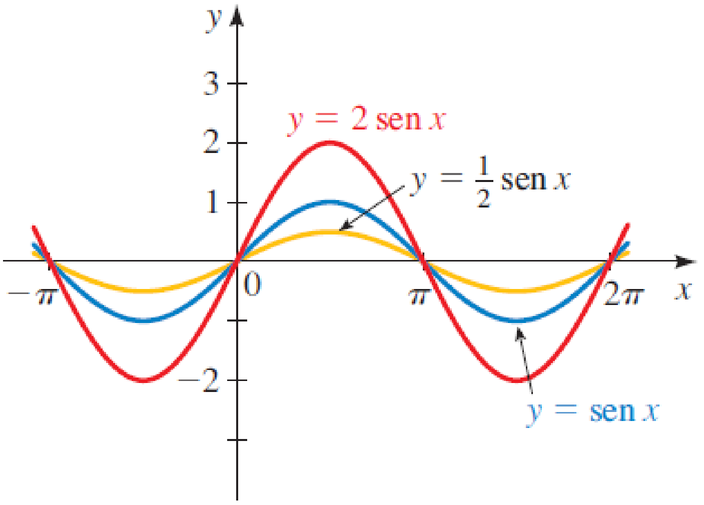


Imagen [-1, 1]

Imagen [-1/2, 1/2]

Imagen [-2, 2]

Figura 1.37

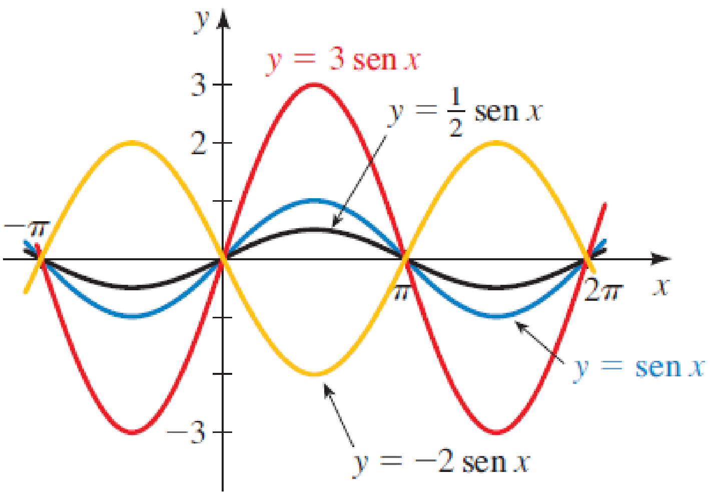
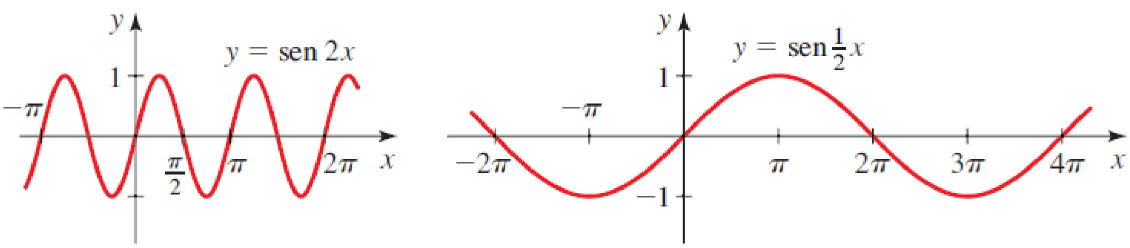


Figura 1.38

En ejemplos siguientes el periodo de la función seno pasa de ser 2π a ser:



a) b)

Período = $\frac{2\pi}{2} = \pi$

Período= $\frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$

Figura 1.39

3.6 – Operaciones con funciones

Dentro de las transformaciones de funciones pueden considerarse aquellas nuevas funciones que surgen de hacer ciertas operaciones del tipo **algebraicas** o aquellas *"combinaciones"* de funciones denominadas **composición**.

3.6.1 Álgebra de funciones:

Sean *f* y *h* dos funciones para las cuales las imágenes de *x* sean *f(x)* y *h(x)* respectivamente. Se tiene:

Álgebra de funciones

Sean f y g funciones con dominios A y B. Entonces las funciones $f+g$, $f-g$, fg y f/g se definen como sigue.

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	Dominio $A \cap B$
$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	Dominio $A \cap B$
$(fg)(x) = f(x)g(x)$	Dominio $A \cap B$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	Dominio $\{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}$

Ejemplo 1: Sean f(x) =x^2 y h(x) = $4x^{3}$`; halle las expresiones para las funciones f+h; f-h; f.h; f/h. Dé el dominio de cada una:

$$S(x) = x^2 + 4x^3$$

$$D(x) = x^2 - 4x^3$$

$$P(x) = x^2.4x^3 = 4x^5$$

$$C(x) = x^2 / 4x^3 = \frac{1}{4x}$$

El D_f = (-∞ ; +∞), el D_h = (-∞ ; +∞); luego la intersección de ambos dominios es (-∞ ; +∞), o sea el dominio para las tres primeras es (-∞ ; +∞) y para el cociente es (-∞ ; +∞) excepto x = 0 (ya que para *x* = 0 es *h(x)* = $4x^3$ = 0).

Ejemplo 2: Sean $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ y $h(x) = \frac{2}{x}$; encontrar *f+h* y *f/h* y los dominios correspondientes:

Solución: D_f = [-2 ; 2] ; D_h = (-∞ ; 0) U (0 ; +∞)

$$S(x) = f(x) + h(x) = \sqrt{4 - x^2} + \frac{2}{x}$$

D_{f+h}= [-2 ; 0) U (0 ; 2]

3.6.2.- Composición de funciones

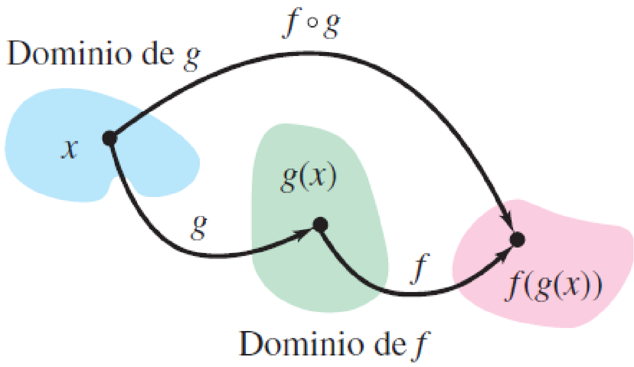
Ahora, considérese una forma muy importante de combinar dos funciones para obtener una nueva función. Suponga que $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 + 1$. Se puede definir una función *h* como

$$h = f\big(g(x)\big) = fog = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$$

La función *h* está compuesta de las funciones *f* y *g* de una manera interesante: dado un numero *x*, se aplica primero a la función *g*, luego se aplica *f* al resultado. En este caso, *f* es la regla "sacar la raíz cuadrada", *g* es la regla "elevar al cuadrado" después sumar 1, y *h* es la regla "elevar al cuadrado, luego sumar 1 y a continuación sacar la raíz cuadrada". En otras palabras, se obtiene la regla *h* al aplicar la regla *g* y luego la regla *f*.

Definición de función compuesta

Sean f y g dos funciones. La función dada por $f\big(g(x)\big) = (fog)(x)$ *se llama* ***función compuesta*** *de f con g. El dominio de* $f\big(g(x)\big)$ *es el conjunto de todas las x del dominio de g tales que g(x) esté en el dominio de f. Este concepto se ilustra en la siguiente figura.*



El dominio de la función compuesta $f \circ g$

La función compuesta de *f* con *g* puede no ser igual a la función compuesta de *g* con *f*.

Ejemplo: Sean $y = f(u) = \sqrt{u}$ donde $u = h(x) = 1 - x^2$. Determinar *F*(*x*)= [*h*(*x*)] y su dominio:

$$F(x) = f[h(x)] = \sqrt{h(x)} = \sqrt{1 - x^2}.$$

El dominio de *h(x)* es (-∞ ; +∞), pero el dominio de *F*(*x*)= *f*[*h*(*x*)] es [-1 ; 1], ya que la raíz existe en el campo de los reales para $x^2 \leq 1$.

Ejemplo de aplicación de la composición de funciones

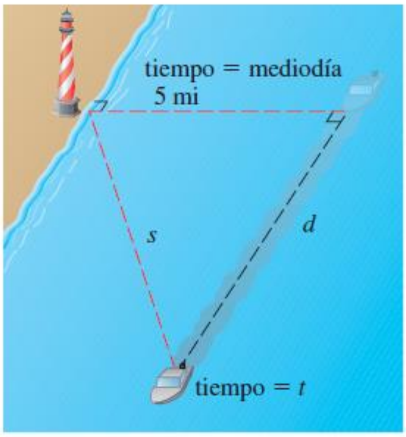
Un barco está viajando a 20 millas/h paralelo a una ribera recta. El barco está a 5 millas de la orilla. Pasa un faro a mediodía.

a) Exprese la distancia *s* entre el faro y el barco como una función de *d*, la distancia que ha recorrido el barco desde mediodía; es decir, encuentre f de modo que $s = f(d)$.

b) Exprese a *d* como una función de *t*, el tiempo transcurrido desde mediodía; es decir, encuentre g tal que $d = g(t)$.

c) Encuentre $f \circ g$. ¿Que representa esta función?

Solución Primero se traza un diagrama como en la siguiente figura:



a) Se pueden relacionar las distancias *s* y *d* mediante el teorema de Pitágoras. Así, *s* puede ser expresada como una función de *d* por $s = f(d) = \sqrt{25 + d^2}$

b) Puesto que la nave está viajando a 20 millas/h, la distancia d que ha recorrido es una función de t como sigue:

$$d = g(t) = 20\,t$$

c) Se tiene: $(f \circ g)(t) = f\big(g(t)\big) = f(20\,t) = \sqrt{25 + (20\,t)^2} = \sqrt{25 + 400\,t^2}$

La función *f(g(t))* da la distancia del barco desde el faro como una función del tiempo.

4 - Caracterización de las funciones

4.1 - Función explícita e implícita

Como vimos al inicio de la guía una función puede expresarse de diversas formas, en el caso de la expresión analítica la función puede definirse de 2 formas:

Una función en la que la variable dependiente se expresa únicamente en términos de la variable independiente es una ***función explícita***. La expresión analítica de estas funciones es $y = f(x)$.

En los casos en la variable dependiente no esté expresada sólo en términos de la variable independiente, se tiene una ***función implícita***. La expresión es $2y - x^3 + 2 = 0$ no presenta a *y* en términos de *x*, por lo que en este caso la función está definida de manera implícita.

4.2 - Función par e impar

Existen ciertas condiciones de ***simetría*** que facilitan el trazado de curvas que representan gráficamente a determinadas funciones. Así, para la función $y = x^2$, basta considerar los valores positivos de *x*, pues para los correspondientes valores negativos $(-x)$, el valor de y es el mismo, dado que $(-x)^2 = x^2$.

Definición de función par:

La función $y = f(x)$ se denomina par, cuando a valores opuestos de x corresponde el mismo valor de y. O sea:

$$\boxed{\boldsymbol{y = f(x)\ es\ par\ si\ f(-x) = f(x)}}.$$

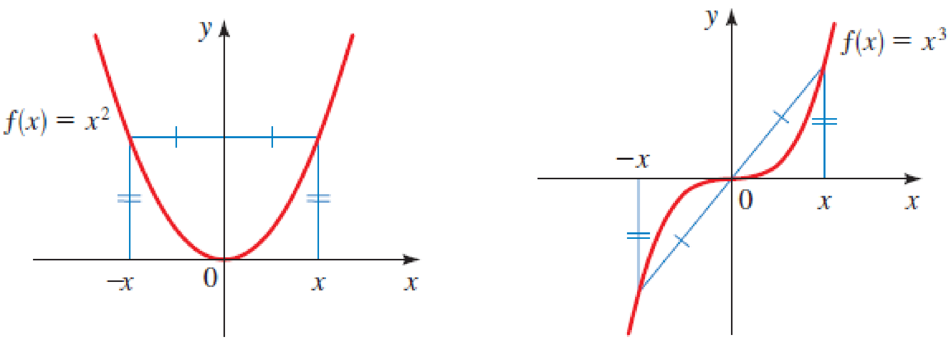
Geométricamente su gráfica es simétrica respecto al eje de las ordenadas.

Definición de función impar:

La función y = f(x) se llama impar, cuando a valores opuestos de x corresponden valores opuestos de y. Vale decir,

$$\boxed{\boldsymbol{y = f(x)\ es\ impar\ si\ f(-x) = -f(x)}}$$

Geométricamente su gráfica es simétrica respecto del origen.



Función Par: La grafica de una función par es simétrica con respecto al eje *y*

Función Impar: La grafica de una función impar es simétrica con respecto al origen.

Figura 1.40

Como se observa, la gráfica de una función "par" es simétrica respecto del eje y, porque si el punto (*x; y*) está en la curva, también lo está el (-x ; y).

Son funciones pares: $y = \cos(x)$; $y = \sec(x)$; $y = x^2$; etc.

Ejemplos de funciones impares son: $y = \dfrac{1}{x}$; $y = sen(x)$;...; etc.

La simetría es una forma de caracterizar una función, pero no necesariamente todas las funciones presentan esta característica. Es decir, que existen funciones que no son pares ni impares. Por ejemplo f(x) = $x^2 + x$ (basta verificar que f(1) = $1^2+1 \neq$ f(-1) = $(-1)^2 - 1 = 0$).

Teorema:

Toda función es igual a la suma de una función par y de una función impar. Como es $f(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(x)$; si se suma y resta $\frac{1}{2}f(-x)$ al segundo miembro, se obtiene:

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$

Resulta de inmediato la demostración; ya que el primer corchete encierra una función **par** y el segundo corchete una función **impar**; como puede verse a continuación, pues siendo $f(x)=(1/2)g(x)+(1/2)h(x)$, donde $g(x)=f(x)+f(-x)$ y $h(x)=f(x)-f(-x)$; es entonces:

$g(-x)=f(-x)+f[-(-x)]=g(x)$ (y por tanto *g(x)* es una función par)

$h(-x)=f(-x)-f[-(-x)]=f(-x)-f(x)=-[f(x)-f(-x)]=-h(x)$, o sea

h(-x) = -*h(x)* y por tanto *h(x)* es una función impar.

Con lo que queda demostrado el teorema.

4.3 - Función Periódica

Definición de función periódica

Una función periódica se puede definir como una función para la cual, para todo valor de x:

$$\boxed{f(x) = f(x+T)} \quad \textbf{(1)}$$

La constante mínima T que satisface la relación **(1)** se llama período de la función. Mediante la repetición de (1) se obtiene:

$$f(x) = f(x+nT); \; n \in Z$$

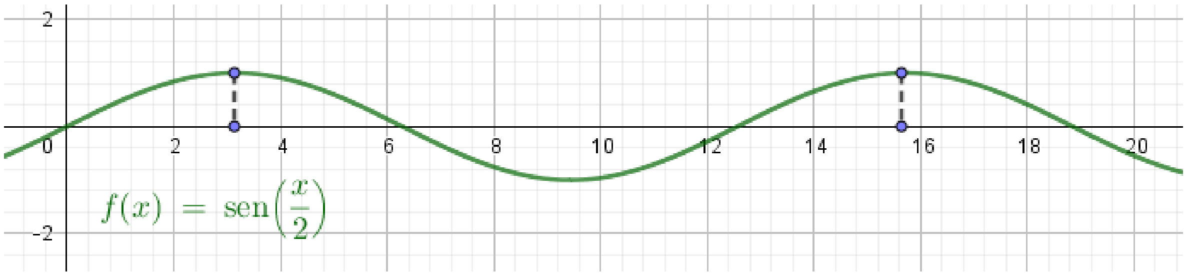
Ejemplo: Determinar si la función $y = sen\,(x/2)$ es periódica. Indicar el período y graficar

La función es periódica de período T=$\frac{2\pi}{1/2}=4\pi$. O bien T=$n4\pi$ con $n \in Z$

En efecto: $sen\frac{1}{2}x = sen\,\frac{1}{2}(x+4\pi)$

Si $x=\pi/2 \;\rightarrow\; sen\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = sen\,\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+4\pi\right) = 0{,}707$

Si $x=\pi \;\rightarrow\; sen\frac{1}{2}\pi = sen\,\frac{1}{2}(\pi+4\pi) = 1$



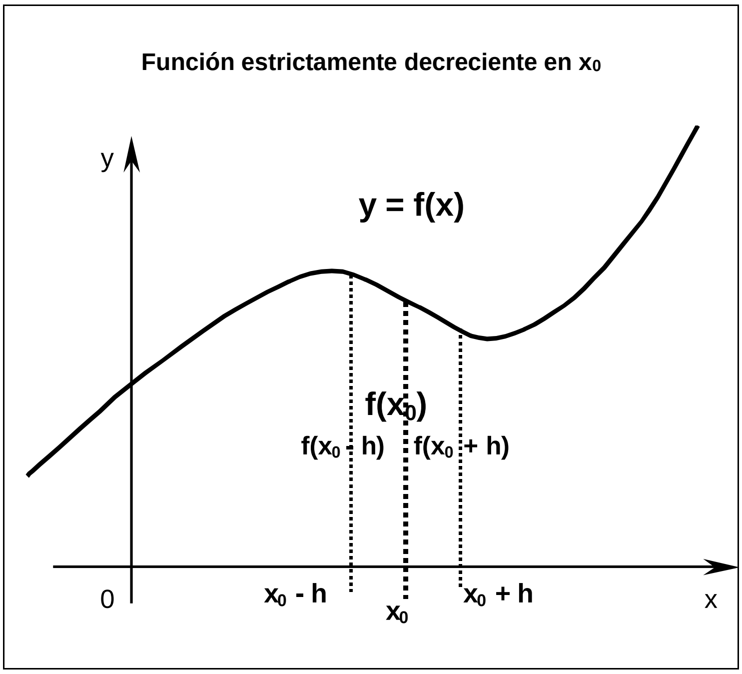
4.4 - Función creciente y función decreciente, en un punto

Definición:

Una función y = f(x) es estrictamente creciente ***en un punto*** *x_0, tal que para todo h >0, se tiene:*

Función estrictamente creciente en x_0 cuando: $f(x_0-h) < f(x_0) < f(x_0+h)$

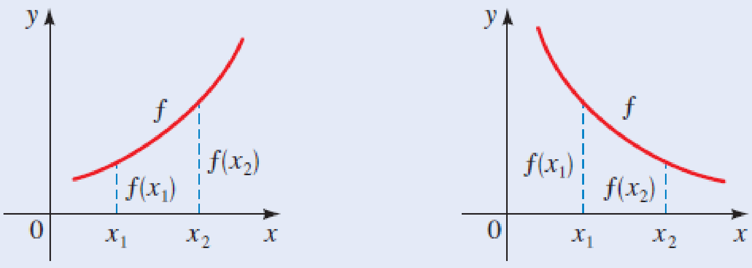
Función estrictamente decreciente en x_0 cuando: $f(x_0-h) > f(x_0) > f(x_0+h)$



4.5 - Función creciente y función decreciente en un intervalo

f es **creciente** en un intervalo I si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I.

f es **decreciente** en un intervalo I si $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I.



f es creciente $\qquad$ f es decreciente

Figura 1.41

4.6 - Monotonía

Definición de función monótona

*Una función $y = f(x)$ tal que, **dentro de su campo de definición**, cumpla la condición:*

$f(x_1) \leq f(x_2)$ $\forall$ *par* x_1 ; x_2 *con* $x_1 < x_2$, *se llamará **monótona creciente.***

*Una función $y = f(x)$ tal que, **dentro de su campo de definición**, cumpla la condición:*

$f(x_1) \geq f(x_2)$ $\forall$ *par* x_1 ; x_2 *con* $x_1 < x_2$, *se llamará **monótona decreciente.**.*

La función se llama monótona ***estrictamente*** creciente si $f(x_1) < f(x_2)$ para $x_1 < x_2$; y se llama monótona estrictamente decreciente si $f(x_1) > f(x_2)$; para todo par x_1 ; x_2 con $x_1 < x_2$.

5- Función inversa

Si se da información de un experimento en el que el cultivo de bacterias empezó con una cantidad inicial de ellas de N_0, el crecimiento de la población de bacterias se registró a intervalos de una hora. El número de bacterias presentes N, es una función del tiempo $N=f(t)$. Suponiendo que se cambia el punto de vista y es de interés el tiempo necesario para que la población llegue a cierto nivel de bacterias. En otras palabras ahora se está considerando a t como una función de N. Esta función recibe el nombre de función inversa de $f(t)$, simbólicamente $f^{-1}(t)$. Así $t = f^{-1}(N)$ es el tiempo necesario para que el nivel de población llegue a N.

Cómo hallar la inversa de una función uno a uno

1. Escriba $y = f(x)$.
2. Resuelva esta ecuación para x en términos de y (si es posible).
3. Intercambie x y y. La ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$.

Ejemplo: Sea la función $y = 2x$, de aquí resulta $x = \frac{1}{2}y$; lo que muestra que la correspondencia entre las dos variables puede considerarse en dos sentidos, y se expresa diciendo que la función inversa de $y = f(x) = 2x$ es $x = g(y) = \frac{1}{2}y$

Es inmediato que la función inversa de $x = \frac{1}{2}y$ es $y = 2x$. Por esta razón, ambas funciones pueden, simplemente, llamarse inversas entre sí. Se utilizará la notación *f* y *g* para dos funciones que son inversas entre sí.

Propiedad de la función inversa

Sea f una función uno a uno con dominio A y rango B. La función inversa f^{-1} satisface las siguientes propiedades de cancelación.

$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad \text{para toda } x \text{ en } A$$

$$f(f^{-1}(x)) = x \qquad \text{para toda } x \text{ en } B$$

A la inversa, cualquier función f^{-1} que satisface estas ecuaciones es la inversa de f.

- Consideraciones Gráficas:

La gráfica de la función inversa dependerá de que variable sea tomada como independiente y cual como dependiente. Podrá coincidir con la gráfica de la función, o bien estar reflejada respecto de la bisectriz y = x (es decir, que ambas gráficas sean simétricas respecto de la bisectriz

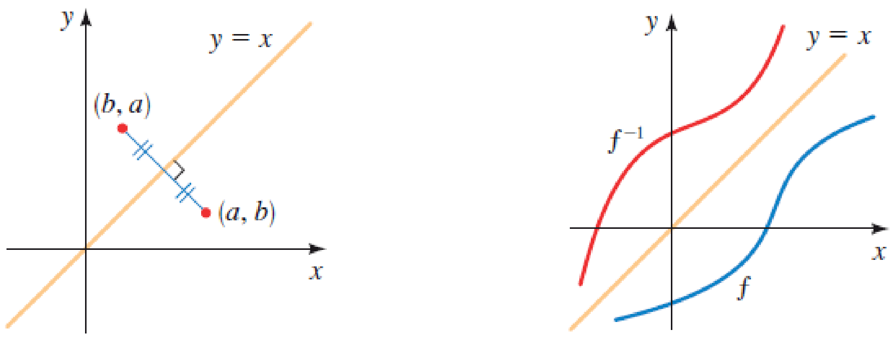


Figura 1.42

- Condiciones que debe cumplir f:

De $y = f(x) = x^2$ surge $g(x) = \pm\sqrt{x}$. En este caso la función *f* está definida para todo valor de *x* y es uniforme, pero la función inversa *g* ofrece un comportamiento más complicado, porque por una parte no está definida para todo *x* (solo para $x \geq 0$) y por otro lado no es uniforme (es biforme).

Es importante resaltar, que como se estableció al inicio del curso, se trabaja con funciones uniformes. Ahora bien, cuando hablamos de funciones a las cuales pueda encontrárseles su inversa, debemos agregar una condición más. Esta condición es muy importante para que la función inversa g(x) también sea uniforme.

*Una función **f(x)** admitirá inversa **g(x)** uniforme, si la **f(x)** es **biunívoca** o función uno a uno.*

Observación: Definición de Función Biunívoca

Una función se llama función **biunívoca** o función **uno a uno** si cumple con las dos condiciones siguientes:

a) Para que *f* sea uniforme a cada *x* del dominio debe corresponderle una sola *y* del recorrido o conjunto de llegada.

b)Para que g resulte uniforme, a cada y del recorrido de *f* debe corresponder una sola x del dominio, y esto no siempre es cierto. Por Ejemplo , no se cumple en $y = f(x) = x^2$(a cada *y* dos *x*).

La característica gráfica de este tipo de funciones es que son cortadas en un punto por las rectas paralelas al eje x; y por las rectas paralelas al eje y.

- Funciones circulares inversas

Dada la función $y = sen(x)$, su función inversa se denomina *arco seno*, y se denota:

$$y = arc\ sen(x)$$

Cuya interpretación es: si *y* es el seno del arco que vale *x*, entonces *x*, será el arco cuyo seno vale *y*. Es decir, de y = *sen x* surge: *x = arc sen y*.

La función *x = arc sen y*, está definida para $-1 \leq y \leq 1$ (ya que *y = sen x* está comprendido entre estos valores) y es función multiforme. Más precisamente, admite infinitos valores de x para cada valor de y.

Para conseguir que el *arc sen y* sea una función uniforme, se restringe el dominio, a los valores comprendidos entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, o sea $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$.

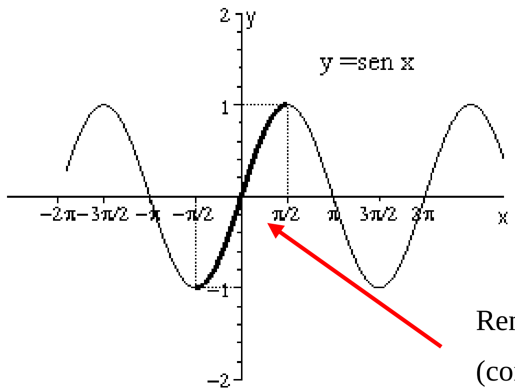


Figura 1.43

Remarcando el *x=arcsen y*

(con dominio restringido)

Se realiza un cambio de las variables (y por x), esto para que al graficar $y = arc\ sen\ x$ se encontrará simétrico de $y = sen\ x$, según la bisectriz $y = x$, Figura 1.44:

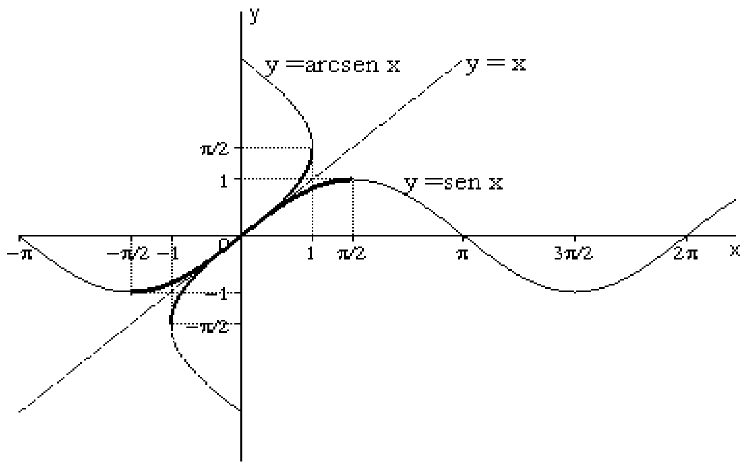


Figura1.44

De igual forma se definen las demás funciones circulares inversas.

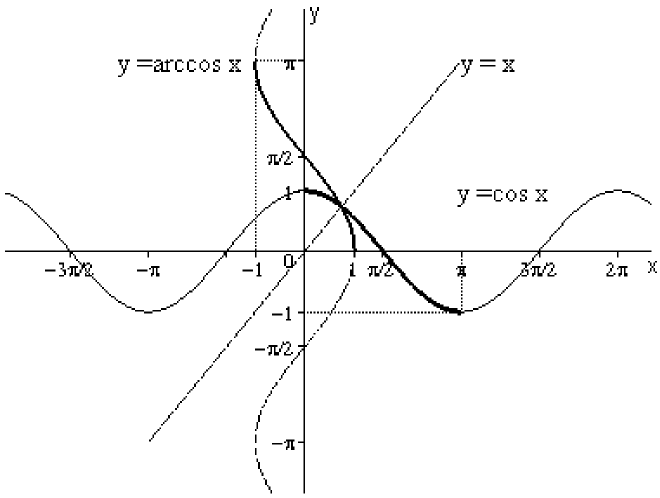


Figura 1.45

Nota: Dada una función mediante un conjunto de pares ordenados, para obtener la inversa de ésta, se intercambian las componentes de cada par ordenado:

Ejemplo: Sea $f = \{(2;3)\ ;\ (5;2)\ ;\ (6;1)\ ;\ (7;-1)\}$

La función inversa g viene dada por:

$$g = \{(3;2); (2;5); (1;6); (-1;7)\}$$

Se evidencia que para que *g* sea uniforme, en *f* no deben haber dos pares ordenados con igual segunda componente.

6 . Modelos Matemáticos: un catálogo de funciones.

Un modelo matemático es una descripción matemática (con frecuencia por medio de una función o una ecuación) de un fenómeno real como lo es el tamaño de una población, la demanda para un producto, la rapidez de un cuerpo en caída, la concentración de un producto en una reacción química, la esperanza de vida de una persona cuando nace o el costo de reducciones de emisiones. El propósito del modelo es entender el fenómeno y quizá hacer predicciones acerca de su futuro comportamiento.

La Figura 1.46 ilustra el proceso de un modelado matemático. Dado un problema real, nuestra primera tarea es formular un modelo matemático al identificar y dar nombre a las variables independiente y dependiente y hacer suposiciones que simplifiquen el fenómeno, lo suficiente para hacerlo matemáticamente manejable. Usamos nuestro conocimiento de la situación física y nuestros conocimientos matemáticos para obtener ecuaciones que relacionen las variables. En situaciones donde no hay ley física que nos guíe, podría haber necesidad de recolectar datos (ya sea de una biblioteca o de Internet o realizando nuestros propios experimentos) y examinar los datos en la forma de una tabla para distinguir patrones. De esta representación numérica de una función podríamos obtener una representación gráfica si trazamos los datos. La gráfica podría hasta sugerir una fórmula algebraica apropiada en algunos casos.

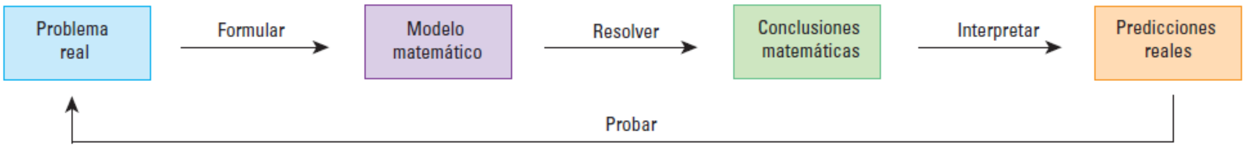


Figura 1.46

La segunda etapa es aplicar las matemáticas que conocemos (por ejemplo, el cálculo que desarrollamos en todo este curso) al modelo matemático que hemos formulado, para deducir conclusiones matemáticas. A continuación, en la tercera etapa, tomamos estas conclusiones matemáticas y las interpretamos como información acerca del fenómeno original real, ofreciendo explicaciones o haciendo predicciones. El paso final es probar nuestras predicciones al comprobarlas contra nuevos datos reales. Si las predicciones no se comparan bien con la realidad, necesitamos refinar nuestro modelo o formular un nuevo modelo y empezar el ciclo otra vez.

Un modelo matemático nunca es una representación completamente precisa de una situación física; es una idealización. Un buen modelo simplifica la realidad suficiente para permitir cálculos matemáticos, pero es bastante preciso como para dar conclusiones valiosas. Es importante darse cuenta de las limitaciones del modelo. A fin de cuentas, la Madre Naturaleza tiene la última palabra.

Hay numerosos tipos diferentes de funciones que se pueden usar para modelar relaciones observadas en el mundo real.

Ejemplo: Modelado del volumen de una caja

Una compañía productora de cereal fabrica cajas para empacar su producto. Por razones estéticas, la caja debe tener las siguientes proporciones: su amplitud es tres veces su profundidad y su altura es cinco veces su profundidad.

a) Halle una función que modele el volumen de la caja en términos de su profundidad.

b) Encuentre el volumen de la caja si su profundidad es 1.5 pulgadas.

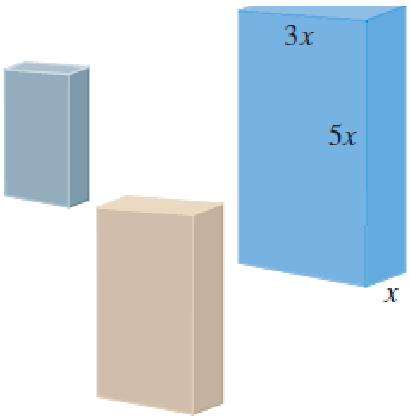
c) ¿Para qué profundidad el volumen es 90 pulg3?

d) ¿Para qué profundidad el volumen es mayor que 60 pulg^3?

Razonamiento acerca del problema:

Experimentemos con el problema. Si la profundidad es 1 pulg, entonces la amplitud es 3 pulg y la altura es 5 pulg. Así que en este caso, el volumen es V = 1 x 3 x 5 = 15 pulg^3. En la tabla se dan otros valores. Observe que todas las cajas tienen la misma forma, y mientras mayor es la profundidad mayor es el volumen.

Profundidad	Volumen
1	$1 \times 3 \times 5 = 15$
2	$2 \times 6 \times 10 = 120$
3	$3 \times 9 \times 15 = 405$
4	$4 \times 12 \times 20 = 960$



Solución

a) Para hallar la función que modela el volumen de la caja, se usan los siguientes pasos.

- Exprese el modelo en palabras: Se sabe que el volumen de una caja rectangular es:

Volumen = profundidad x ancho x altura

- Elija la variable: Hay tres cantidades variables: ancho, profundidad y altura. Puesto que la función que se desea depende de la profundidad, sea x = profundidad de la caja

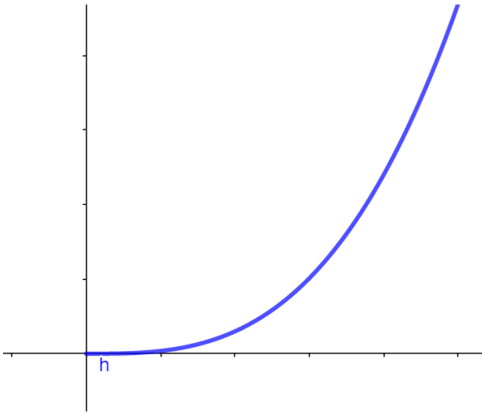
Entonces se expresan las otras dimensiones de la caja en términos de x.

En palabras	En álgebra
Profundidad	x
Ancho	$3x$
Altura	$5x$

- Establezca el modelo: El modelo es la función V que da el volumen de la caja en términos de la profundidad x.

$$\text{volumen} = \text{profundidad} \times \text{ancho} \times \text{altura}$$
$$V(x) = x \cdot 3x \cdot 5x$$
$$V(x) = 15x^3$$

El volumen de la caja se modela mediante la función V(x) = 15 x^3 . La función *V* se grafica en la figura 1.47



Se usa la función obtenida para dar respuesta a los apartados b) a d) del problema planteado

Figura 1.47

Bibliografía de referencia

- ***CÁLCULO 1 DE UNA VARIABLE*** (novena edición)- Ron Larson & Bruce H. Edwards. McGraw Hill, 2010.
- ***CÁLCULO. Trascendentes tempranas*** (cuarta edición)- Dennis G. Zill &Warren S. Wright. McGraw Hill, 2011.
- ***CÁLCULO DE UNA VARIABLE. Trascendentes tempranas*** (sexta edición)- James Stweart. Cengage Learning, 2008.

Anexo Tema 1

A1 - Propiedades para recordar:

Propiedades de las Fracciones:

PROPIEDAD	DESCRIPCION
1. $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$	Cuando se **multiplican fracciones**, se multiplican los numeradores y los denominadores.
2. $\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c}$	Cuando se **dividen fracciones**, se invierte el divisor y se multiplica.
3. $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} = \dfrac{a+b}{c}$	Cuando se **suman fracciones** con el **mismo denominador** se suman los numeradores.
4. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$	Cuando se **suman fracciones** con **denominadores diferentes**, se busca un denominador común. Luego se suman todos los numeradores.
5. $\dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b}$	**Se anulan** los números que son **factores comunes** en el numerador y en el denominador.
6. Si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, entonces $ad = bc$	**Multiplicación cruzada**.

Leyes de los exponentes

Ley	Ejemplo	Descripción
1. $a^m a^n = a^{m+n}$	$3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$	Para multiplicar dos potencias del mismo número, sume los exponentes.
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\dfrac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$	Para dividir dos potencias del mismo número, reste los exponentes.
3. $(a^m)^n = a^{mn}$	$(3^2)^5 = 3^{2 \cdot 5} = 3^{10}$	Para elevar una potencia a una nueva potencia, multiplique los exponentes.
4. $(ab)^n = a^n b^n$	$(3 \cdot 4)^2 = 3^2 \cdot 4^2$	Para elevar un producto a una potencia, eleve cada factor a la potencia.
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	$\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{3^2}{4^2}$	Para elevar un cociente a una potencia, eleve tanto el numerador y denominador a la potencia.
6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$	$\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^2$	Para elevar una fracción a una potencia negativa, invierta la fracción y cambie el signo del exponente.
7. $\dfrac{a^{-n}}{b^{-m}} = \dfrac{b^m}{a^n}$	$\dfrac{3^{-2}}{4^{-5}} = \dfrac{4^5}{3^2}$	Para pasar un número elevado a una potencia desde el numerador al denominador o desde el denominador al numerador, cambie el signo del exponente.

Propiedades de las raíces *n*-ésimas

Propiedad	Ejemplo
1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{-8 \cdot 27} = \sqrt[3]{-8}\sqrt[3]{27} = (-2)(3) = -6$
2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}} = \dfrac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \dfrac{2}{3}$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$
4. $\sqrt[n]{a^n} = a$ si n es impar	$\sqrt[3]{(-5)^3} = -5, \quad \sqrt[5]{2^5} = 2$
5. $\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$ si n es par	$\sqrt[4]{(-3)^4} = \lvert -3 \rvert = 3$

Definición de exponentes racionales

Para cualquier exponente racional m/n de los términos más bajos, donde m y n son enteros y $n > 0$, definimos

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m \qquad \text{o en forma equivalente} \qquad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Si n es par, entonces es necesario que $a \geq 0$.

A2 – La recta:

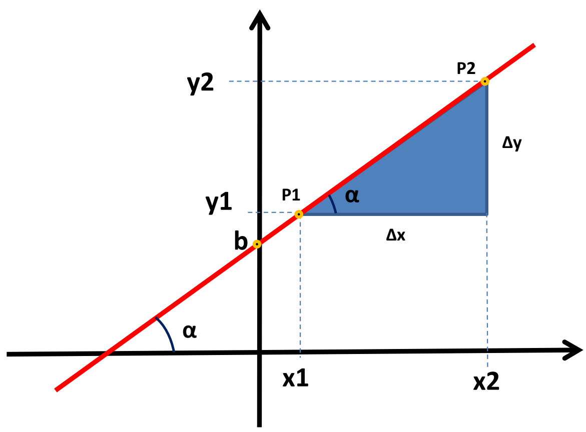
Pendiente de una recta

La **pendiente** m de una recta que no es vertical y que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es

$$m = tg\,\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$m = \frac{\text{desplazamiento vertical}}{\text{desplazamiento horizontal}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

La pendiente de una recta vertical no está definida.



- Ecuaciones de rectas

El concepto de pendiente permite determinar la ecuación de una recta. Por un punto $P_1(x_1,y_1)$ pasa solamente una recta L con una pendiente determinada m. Para encontrar su ecuación, supóngase que $P(x,y)$ denota cualquier punto de la recta diferente a P_1, $x \neq x_1$. Entonces, como la pendiente de la recta que pasa por P_1 y P es m, de la definición de pendiente se tiene:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=m \Leftrightarrow y-y_1=m(x-x_1)$$

Que es la ecuación denominada **Forma punto pendiente de la ecuación de una recta.**

Hay otras importantes formas de ecuaciones de rectas. Si la recta L pasa por el eje y en (0,b), entonces de se obtiene:

$$y-b=mx$$
$$y=mx+b$$

Forma pendiente- ordenada de la ecuación de la recta.

El número b, como ya se dijo, es la **ordenada al origen** de la recta. Si la recta es horizontal y pasa por $P_1(x_1,y_1)$, entonces haciendo m = 0 en (1) se obtiene

$$y-y_1=0(x-x_1)$$
$$y=y_1$$

Ecuación de una recta horizontal que pasa por $P_1(x_1,y_1)$

Si la recta es vertical, cualquier par de puntos de la recta tienen la misma abscisa. En consecuencia, si P(x,y) se localiza en la recta vertical que pasa por $P_1(x_1,y_1)$ se tiene que:

$x = x_1$ **Ecuación de la recta vertical que pasa por $P_1(x_1,y_1)$**

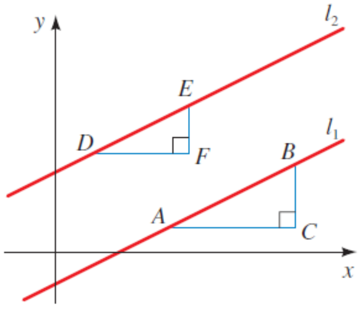
- Rectas paralelas y perpendiculares

Puesto que la pendiente mide la inclinación de una recta, es razonable que las rectas paralelas tengan la misma pendiente. De hecho, podemos demostrarlo.

Rectas paralelas

Dos rectas no verticales son paralelas si y solo si tienen la misma pendiente.

Demostración Sean las rectas l_1 y l_2 que tienen pendientes m1 y m2.



Si las rectas son paralelas, entonces los triángulos rectángulos ABC y DEF son semejantes, de modo que $m1 = \frac{d(B,\ C)}{d(A,\ C)} = \frac{d(E,\ F)}{d(D,\ F)} = m2$

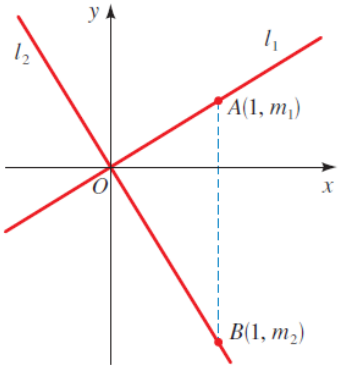
Y al contrario, si las pendientes son iguales, entonces los triángulos son semejantes, por lo que el ángulo BAC y el ángulo EDF son semejantes y las rectas son paralelas.

Rectas perpendiculares

La condición para rectas perpendiculares no es tan obvia como con las rectas paralelas.

Dos rectas con pendientes *m1* y *m2* son perpendiculares si y solo si *m1.m2=-1*, es decir, sus pendientes reciprocas y de signo contrario: $m1 = \frac{-1}{m2}$

Asimismo, una recta horizontal (pendiente 0) es perpendicular a la recta vertical (pendiente indefinida).



Demostración

Si las rectas l_1 y l_2 tienen pendientes *m1* y *m2*, entonces sus ecuaciones son *y = m1x* y *y = m2x*. Observe que *A(1, m1)* queda sobre l_1y *B(1, m2)* queda sobre l_2. Según el teorema de Pitágoras y su inverso, OA es perpendicular a OB si y solo si

$$[d(O,A)]^2 + [d(O,B)]^2 = [d(A,B)]^2$$

De acuerdo con la fórmula de la distancia, esto se transforma en

$$(1^2 + m_1^2) + (1^2 + m_2^2) = (1-1)^2 + (m_2 - m_1)^2$$

$$2 + m_1^2 + m_2^2 = m_2^2 - 2m_2m_1 + m_1^2$$

$$2 = -2m_2m_1$$

$$m_2m_1 = -1$$

A3 -Funciones hiperbólicas

Las combinaciones $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ y $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ de las funciones exponenciales se encuentran en muchas aplicaciones.

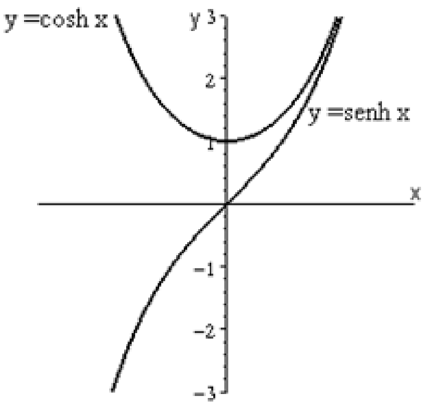
Estas funciones se designan por:

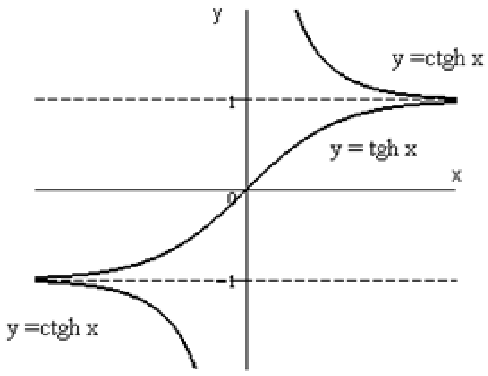
Seno Hiperbólico de *x:* $sh\ (x)$ $\qquad sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Coseno Hiperbólico de *x:* $ch\ (x)$ $\qquad ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Tangente Hiperbólica de *x*: $tgh\ (x)$ $\qquad$ tgh (x) = $\dfrac{sh(x)}{ch(x)} = \dfrac{(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})}$

Cotangente Hiperbólica de *x:* $ctgh\ (x)$ $\qquad$ ctgh (x) = $\dfrac{ch(x)}{sh(x)} = \dfrac{(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})}$





Las funciones $sh(x), ch(x), tgh(x)$, están definidas para todo valor de *x*. La función $ctgh(x)$ también, a excepción del punto *x* = 0.

De la definición de las funciones hiperbólicas se deducen relaciones análogas a las conocidas para las funciones circulares:

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \textbf{(1)}$$

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \textbf{(2)}$$

sumando y restando **(1)** y **(2)** se obtiene respectivamente:

$$ch(x) + sh(x) = e^{x} \qquad \textbf{(3)}$$

$$ch(x) - sh(x) = e^{-x} \qquad \textbf{(4)}$$

Multiplicando la **(3)** por la **(4)** resulta:

$$ch^2(x) - sh^2(x) = 1 \qquad \textbf{(5)}$$

De donde, despejando:

$$ch(x) = \pm\sqrt{sh^2(x) + 1} \qquad \textbf{(6)}$$

$$sh(x) = \pm\sqrt{ch^2(x) - 1} \qquad \textbf{(7)}$$

Dividiendo la 5) por $ch^2(x)$:

$$1 - tgh^2(x) = \frac{1}{ch^2(x)} \Rightarrow 1 - thg^2(x) = \sec h^2(x) \therefore tgh(x) = \pm\sqrt{(1 - \sec h^2 x)} \qquad \textbf{(8)}$$

De igual modo, se pueden conseguir distintas relaciones.