



MINISTERIO DE CULTURA Y
EDUCACIÓN
Universidad Nacional de San Juan



FACULTAD DE INGENIERÍA

Departamento de Matemática

Cátedra: CÁLCULO I – ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Autoría: Equipo de Cátedra - 2023

GUÍA DE EJERCICIOS TEMA 1

FUNCIONES REALES

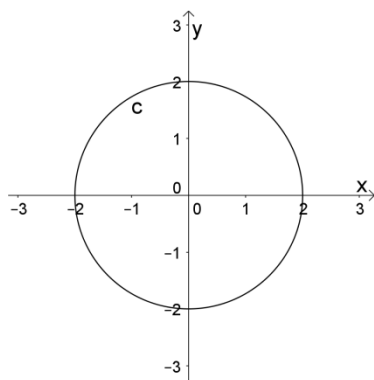
1. Funciones uniformes y sus gráficas

Complete:

- Una función es uniforme cuando
.....
- Gráficamente una función es uniforme cuando.....
.....
- El dominio de una función es
- La imagen de una función es.....

1.1. Indicar cuáles de las siguientes gráficas corresponden a funciones uniformes y cuáles no. Si lo es, indicar dominio e imagen.

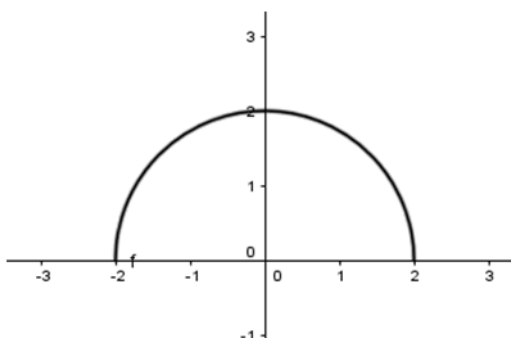
a) $x^2 + y^2 = 4$



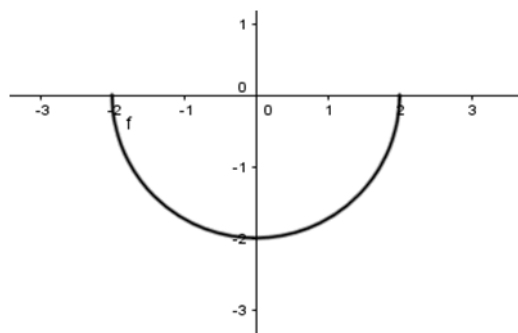
La función **no es uniforme** porque existen valores de la variable x a los cuales les corresponde más de un valor de la variable y .

Geométricamente puede argumentarse que no es función uniforme ya que una recta paralela al eje y corta a la función en más de un punto.

Se trata como dos funciones: $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$

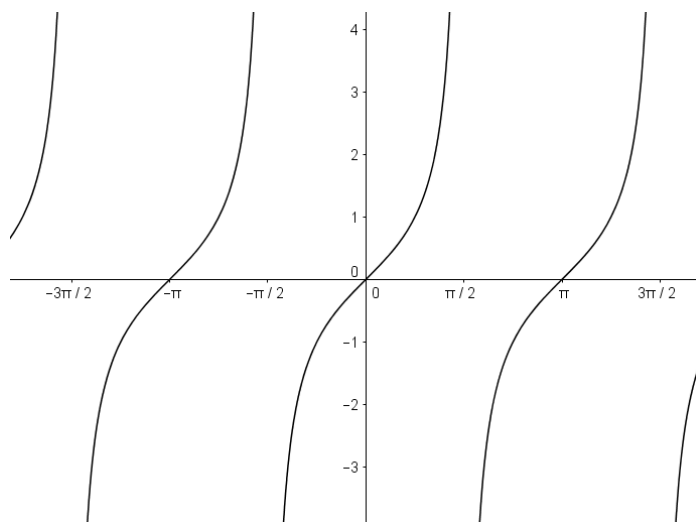


$y_1 = \sqrt{4 - x^2}$



$y_2 = -\sqrt{4 - x^2}$

b) $y = \tan x$



La función **es uniforme** ya que una recta paralela al eje y corta a la gráfica de la función en un solo punto.

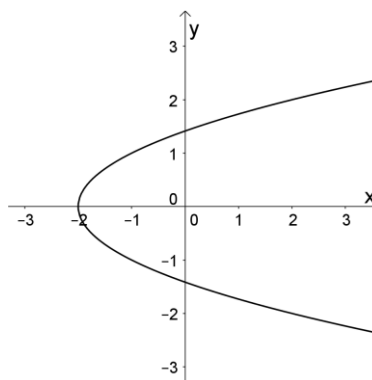
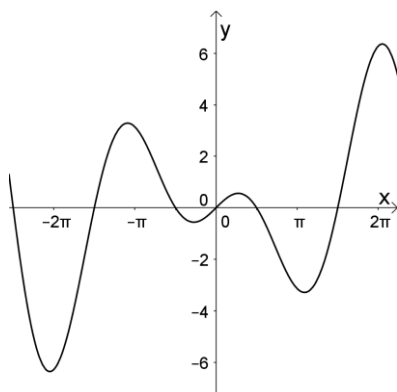
Imagen = $\mathbb{R}$

Dominio = $\mathbb{R} - \left\{ (2k + 1) * \frac{\pi}{2} \right\}$
 $k \in \mathbb{Z}$

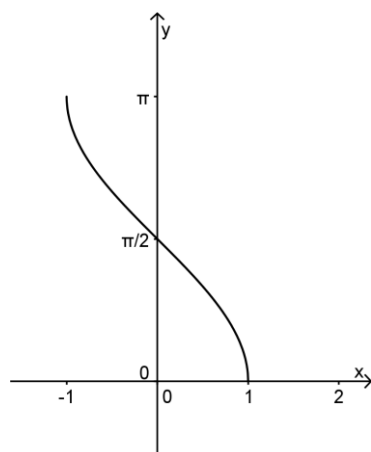
Ejercicios:

c) $y = x \cos x$

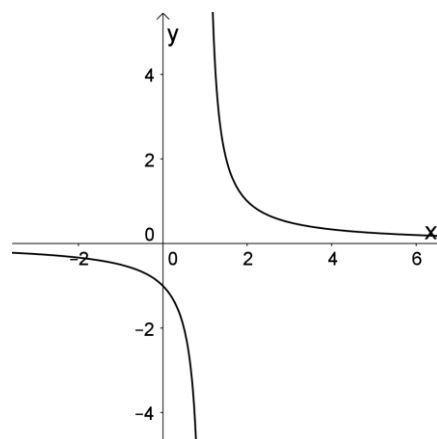
d) $y = \pm\sqrt{x + 2}$



e) $y = \arcsin x$



f) $y = \frac{1}{x-1}$

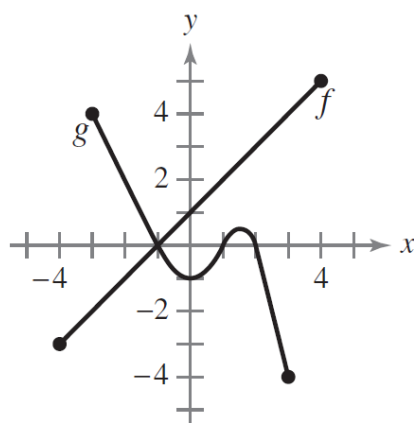


NOTACIÓN DE FUNCIONES:

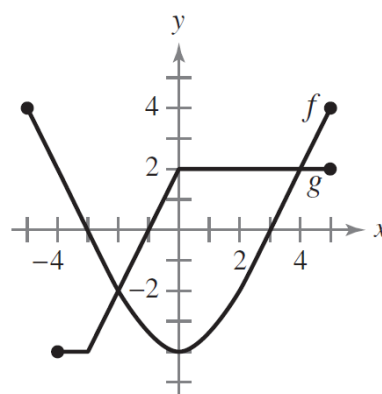
Se sabe que la notación de funciones responde al lenguaje matemático, entonces, en lugar de preguntar ¿cuál es el valor de y que corresponde a $x=3$? ¿cómo se podría preguntar lo mismo teniendo en cuenta la notación de funciones?

1.2. Dadas las gráficas A y B responda los siguientes apartados:

- Identifique dominio e imagen de $f(x)$ y $g(x)$
- Estime $f(-2)$ y $g(3)$
- ¿Para qué valor/es $f(x) = g(x)$?
- Estime la/s solución/es para $f(x) = 2$
- Estime la/s solución/es para $g(x) = 0$



Gráfica A



Gráfica B

1.3. **Valor de la función:** Evaluar, si es posible, la función en los valores dados de la variable independiente. Simplificar los resultados.

a) $\boxed{f(x) = x^3 - x}$

- $f(0) \rightarrow f(0) = 0^3 - 0 = 0$
- $f(-1) \rightarrow f(-1) = (-1)^3 - (-1) = 0$
- $f(c) \rightarrow f(c) = c^3 - c$
- $f(x - a) \rightarrow$

$$f(x - a) = (x - a)^3 - (x - a) = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 - x + a$$

$$f(x - a) = x^3 - 3ax^2 + (3a^2 - 1)x - (a^3 - a)$$

- $f\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^3 - \frac{1}{x} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} = \frac{1-x^2}{x^3}$

b) $\boxed{f(x) = \frac{1}{x}}$

- $f(0) \rightarrow f(0) = \frac{1}{0} \rightarrow \nexists$

- $f(-x) \rightarrow f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$

- $f(x + \Delta x) \rightarrow f(x + \Delta x) = \frac{1}{x + \Delta x}$

- $f\left(\frac{1}{1 + \Delta x}\right) \rightarrow f\left(\frac{1}{1 + \Delta x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{1 + \Delta x}} = 1 + \Delta x$

- $f(x + \Delta x) - f(x) \rightarrow$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - (x + \Delta x)}{(x + \Delta x)x} = \frac{x - x - \Delta x}{(x + \Delta x)x} = \frac{-\Delta x}{(x + \Delta x)x}$$

Ejercicios:

c) $f(x) = 2x - 3$

- $f(0)$
- $f(-x)$
- $f(x + \Delta x) - f(x)$
- $f(x - 1)$
- $f(x + \Delta x)$

d) $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \rightarrow x \leq 0 \\ x^2 & \rightarrow x > 0 \end{cases}$

- $f(0)$
- $f(2)$
- $f(-1)$
- $f(x^2 + 1)$

e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

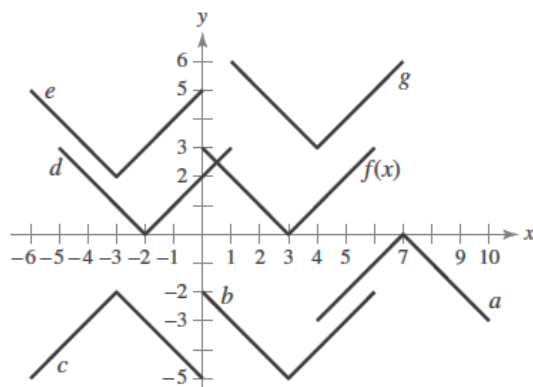
- $f(0)$
- $f(x^2 + 1)$
- $f(3)$
- $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

TRANSFORMACIÓN DE FUNCIONES:

- Mencionar tres tipos de transformaciones que se pueden analizar en una gráfica
.....
- Dada $y = f(x)$ y c constante real positiva, escribir la expresión algebraica de la función que se obtiene al aplicar a $f(x)$ la transformación propuesta.
 - Traslación horizontal de c unidades a la **derecha**
 - Traslación horizontal de c unidades a la **izquierda**
 - Traslación vertical de c unidades **hacia abajo**
 - Traslación vertical de c unidades **hacia arriba**
 - **Reflexión** respecto al eje x
 - **Reflexión** respecto al eje y
 - **Reflexión** respecto al origen

1.4. En el siguiente gráfico aparecen la función $f(x)$ y una serie de funciones obtenidas por transformaciones aplicadas a ella.

Identificar cada expresión analítica con su gráfica.



$$y = f(x + 5) \longrightarrow$$

$$y = -f(-x) - 2 \longrightarrow$$

$$y = f(x + 6) + 2 \longrightarrow$$

$$y = f(x) - 5 \longrightarrow$$

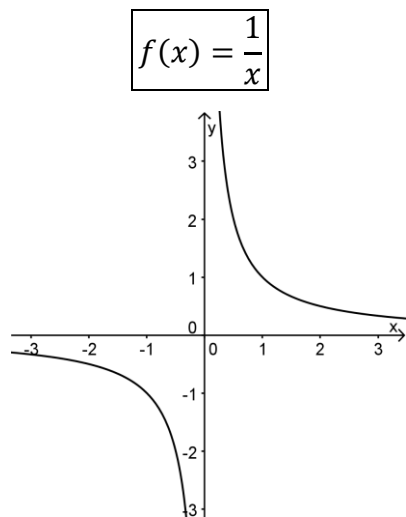
$$y = -f(x - 4) \longrightarrow$$

$$y = f(x - 1) + 3 \longrightarrow$$

1.5. En un mismo par de ejes coordenados graficar las funciones dadas, transformando la gráfica de la función elemental remarcada.

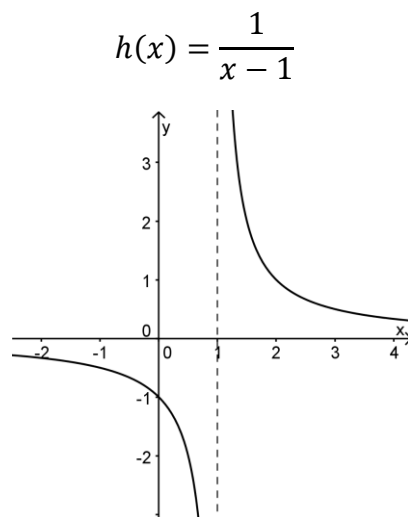
Indicar Dominio e Imagen de cada una de ellas.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$; $h(x) = \frac{1}{x-1}$; $k(x) = \frac{1}{x} + 2$;



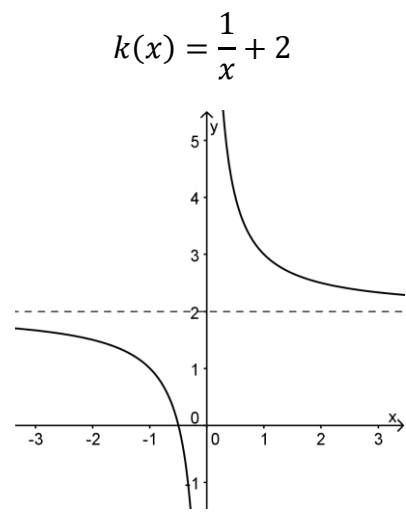
$$D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

$$I_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$



$$D_h = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$$

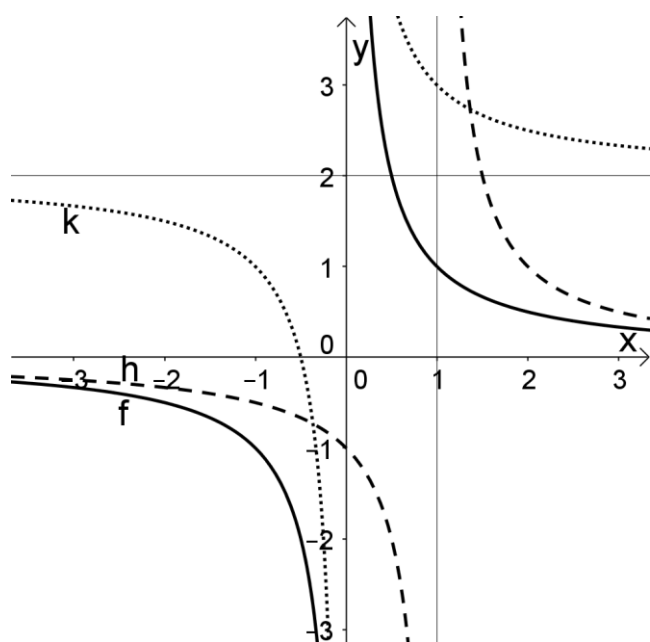
$$I_h = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$



$$D_k = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

$$I_k = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$$

Resumen de las tres gráficas anteriores:



Transformaciones:

$h(x)$: presenta un **desplazamiento horizontal** con respecto a $f(x)$. El valor de f en x es igual al valor de h en $(x+1)$ por lo que la función se desplaza 1 unidad a la derecha.

$k(x)$: presenta un **desplazamiento vertical** al sumar una constante a la función. Como la constante es positiva, la gráfica se desplaza hacia arriba.

b) $f(x) = \sin x$; $g(x) = 2\sin x$; $h(x) = \sin 2x$

Aclaración:

$$f(x) = k \sin(nx)$$

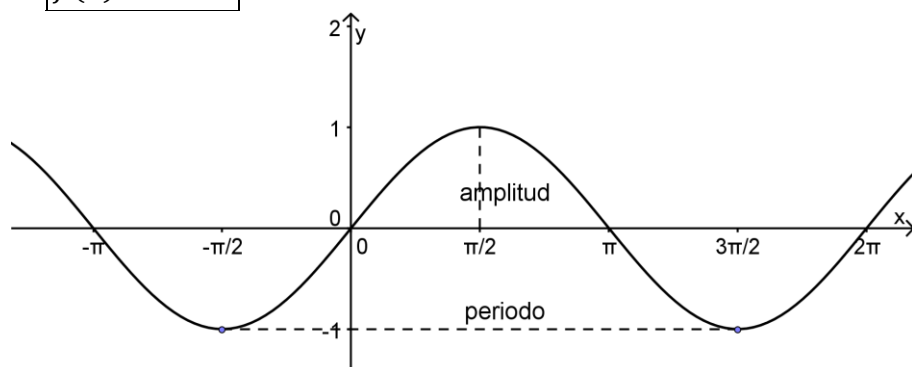
k : modifica la amplitud de la onda (máxima altura alcanzada)

n : modifica el periodo (distancia entre dos puntos consecutivos donde la función toma el mismo valor bajo las mismas condiciones)

$n > 1$ disminuye el periodo

$n < 1$ aumenta el periodo

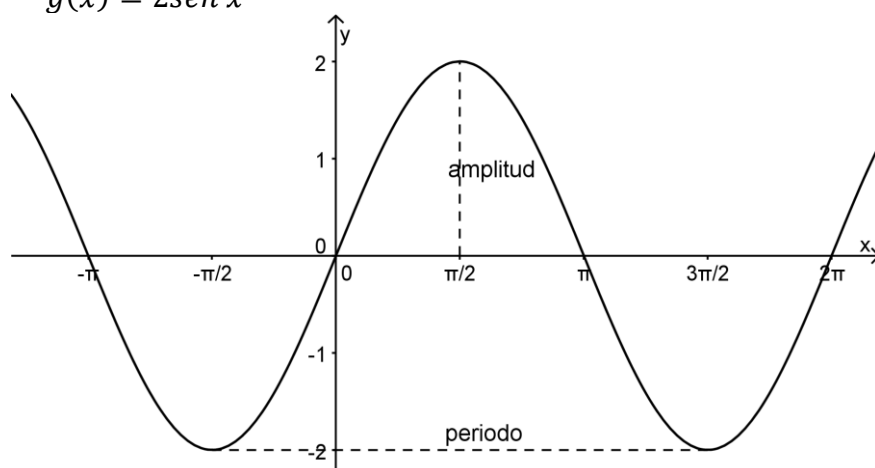
$$f(x) = \sin x$$



$$D_f = (-\infty, \infty)$$

$$I_f = [-1, 1]$$

$$g(x) = 2\operatorname{sen} x$$

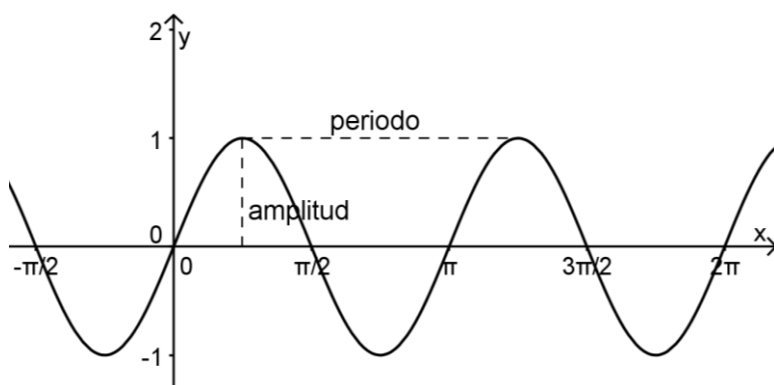


$$D_g = (-\infty, \infty)$$

$$I_g = [-2, 2]$$

$g(x)$: hay un **estiramiento vertical** con respecto a f debido a que se multiplica la función por una constante mayor a 1.

$$h(x) = \operatorname{sen} 2x$$



Transformación:

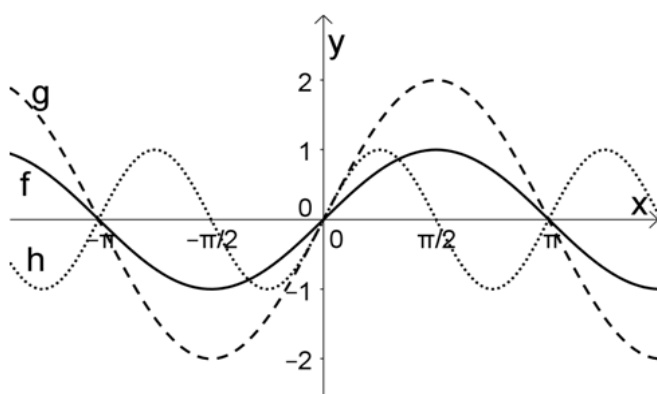
$$h(x) = \operatorname{sen} 2(x + T) \therefore T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$h(x) = \operatorname{sen} 2(x + \pi)$$

$$D_h = (-\infty, \infty) \quad I_h = [-1, 1]$$

$h(x)$: hay un **acortamiento horizontal** con respecto a f ya que se multiplica la variable por una constante mayor a 1.

Resumen de las tres gráficas anteriores:

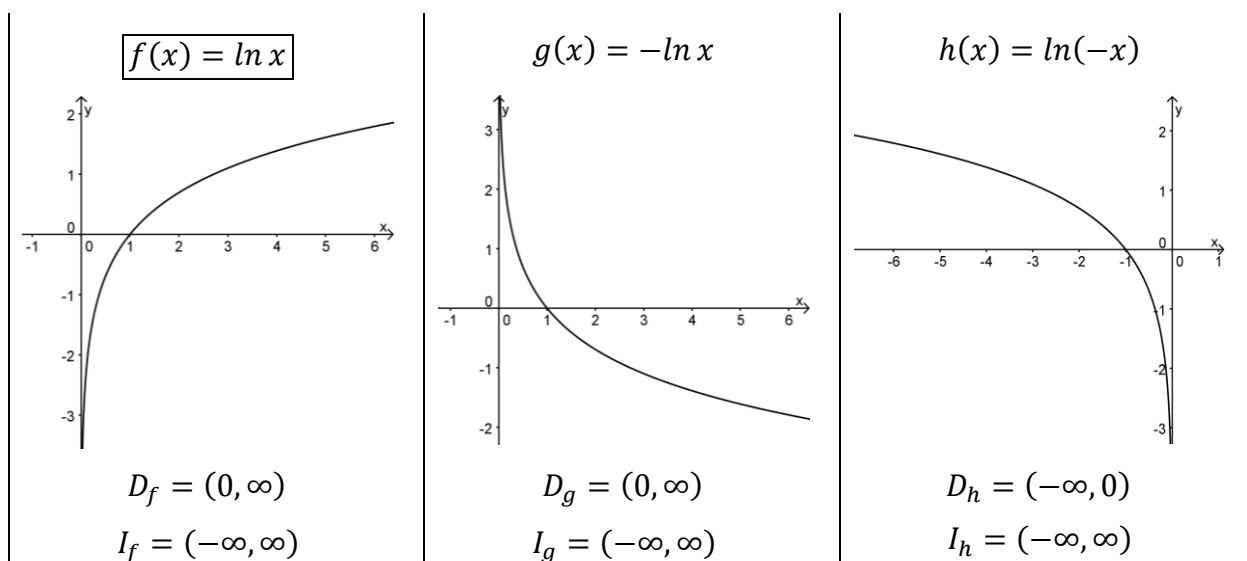


$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

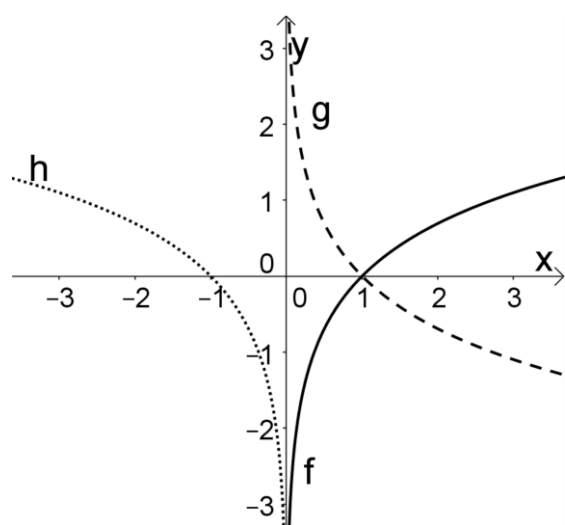
$$g(x) = 2\operatorname{sen} x$$

$$h(x) = \operatorname{sen} 2x$$

c) $f(x) = \ln x$; $g(x) = -\ln x$; $h(x) = \ln(-x)$



Resumen de las tres gráficas anteriores:



$f(x) = \ln x$
 $g(x) = -\ln x$
 $h(x) = \ln(-x)$

Transformaciones:

$g(x)$: presenta una **reflexión en el eje x** con respecto a f debido a que se multiplica la función por (-1) .

$h(x)$: presenta una **reflexión en el eje y** con respecto a f debido a que se multiplica la variable por (-1) .

Ejercicios:

d) $f(x) = e^x$; $g(x) = e^{-x}$; $h(x) = -e^x$; $k(x) = -e^{-x}$

e) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $g(x) = \sqrt[3]{-x}$; $h(x) = \sqrt[3]{x+1}$

f) $f(x) = x^2$; $g(x) = x^2 - 4$; $h(x) = (x - 3)^2$

1.6. Para cada una de las siguientes funciones dadas, determinar:

- Dominio
- Gráfica a mano alzada en un par de ejes coordenados, marcando los puntos notables.
- Imagen
- Puntos de corte con los ejes coordenados (ceros y ordenada al origen de la función).

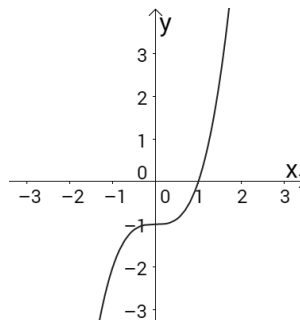
a) $y = x^3 - 1$

Dominio: $(-\infty, \infty)$

Imagen: $(-\infty, \infty)$

Intersección eje x: $P(1, 0)$

Intersección eje y: $Q(0, -1)$



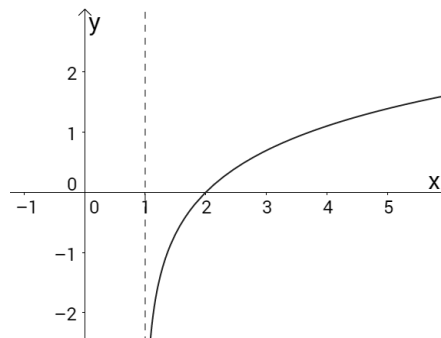
b) $y = \ln(x - 1)$

Dominio: $(1, \infty)$

Imagen: $(-\infty, \infty)$

Intersección eje x: $P(2, 0)$

Intersección eje y: no tiene



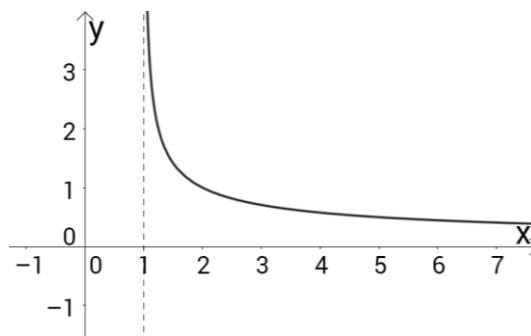
c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

Dominio: $(1, \infty)$

Imagen: $(0, \infty)$

Intersección eje x: no tiene

Intersección eje y: no tiene



Ejercicios:

d) $y = \frac{1}{(x-1)^2}$

e) $y = (x - 1)^2$

f) $y = \sqrt{x + 2}$

g) $y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$

h) $y = \sqrt{-x}$

i) $y = \ln x - 1$

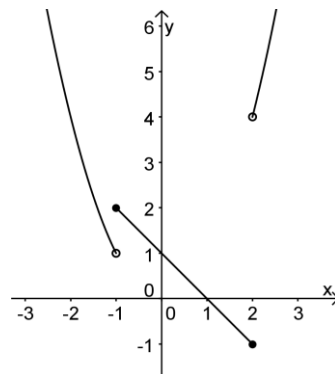
j) $y = \frac{x^2}{x-2}$

k) $y = (2)^x$

l) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

1.7. Graficar las siguientes funciones por partes o trozos:

$$a) \ y = \begin{cases} x^2 & x < -1 \\ 1 - x & -1 \leq x \leq 2 \\ x^2 & x > 2 \end{cases}$$



Ejercicios:

$$b) \ y = \begin{cases} x + 2 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

$$c) \ y = \begin{cases} x - 1 & x \leq 1 \\ x^2 - 4 & 1 < x \leq 3 \\ 5 & x > 3 \end{cases}$$

1.8. Indicar, utilizando la definición, si la función es par, impar o ninguna de ellas. Verificar la propiedad gráfica que corresponda.

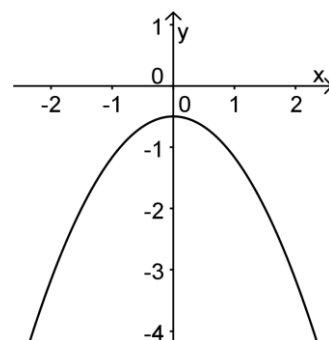
Completar: “ $f(x)$ es función par si verifica que $f(x) = \dots\dots\dots$; $\forall x \in D_f$ ”.

“ $f(x)$ es función impar si verifica que $f(x) = \dots\dots\dots$; $\forall x \in D_f$ ”.

$$a) \ y = -\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= -\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2} \\ f(-x) &= -\frac{2}{3}(-x)^2 - \frac{1}{2} = -\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2} \\ &= f(x) \end{aligned} \right\} f(x)$$

→ $f(x)$ es PAR



Se observa que se verifica la propiedad de que la gráfica de la función es **simétrica con respecto al eje y**.

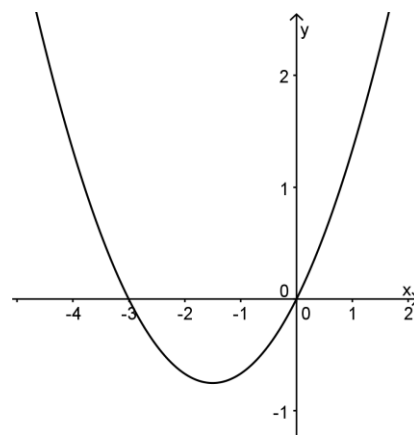
$$b) \ y = \frac{x^2}{3} + x$$

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2}{3} + x \\ f(-x) &= \frac{(-x)^2}{3} + (-x) = \frac{x^2}{3} - x \end{aligned} \right\} f(x) \neq f(-x)$$

→ $f(x)$ no es PAR

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2}{3} + x \\ -f(-x) &= -\left(\frac{x^2}{3} - x\right) = -\frac{x^2}{3} + x \\ &\neq f(x) \end{aligned} \right\} f(x)$$

→ $f(x)$ no es IMPAR



GUÍA DE EJERCICIOS TEMA 1

Se observa que la gráfica de la función no verifica la propiedad de ser simétrica con respecto al eje y , como tampoco ser simétrica con respecto al origen.

Ejercicios:

c) $y = 2x - x^3$

d) $y = -\frac{1}{x}$

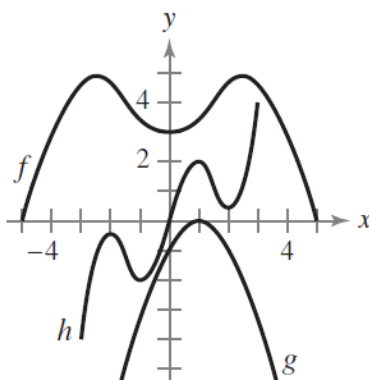
e) $y = -\frac{1}{x^2}$

f) $y = \cos x$

g) $y = |x|$

h) $y = 3x - 1$

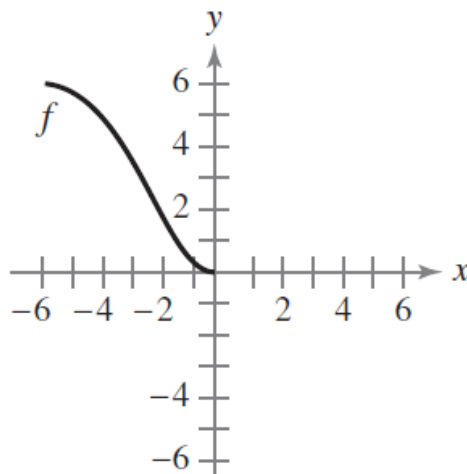
1.9. En la figura se muestran las gráficas de $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$. Determinar si cada función es par, impar o ninguna de las dos y explique por qué.



1.10. Completar la gráfica de la función $f(x)$ sabiendo que su dominio es $[-6; 6]$ para que:

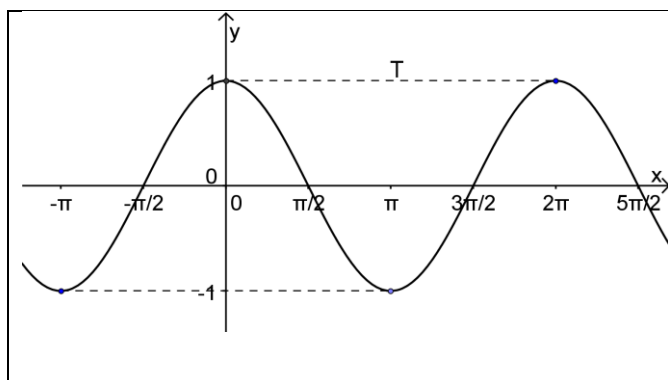
a) $f(x)$ sea par (en color rojo)

b) $f(x)$ sea impar (en color verde)



1.11. Indicar, si la función es periódica o no y el valor del periodo. Justifique utilizando la definición.

a) $y = \cos x$



Se observa que la función toma el mismo valor, bajo iguales condiciones, luego de una longitud de 2π . Por ello: $\cos 0 = \cos 2\pi$

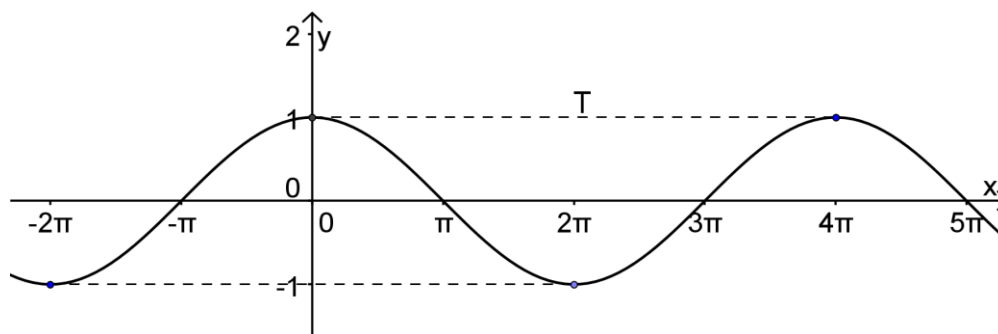
$$\cos x = \cos(x + T)$$

$$x = 0 \rightarrow 0 + T = 2\pi$$

$$\boxed{T = 2\pi}$$

Otro ejemplo de función periódica y como hallar el periodo:

$$y = \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \rightarrow y = \cos\frac{1}{2}(x + T) \rightarrow T = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$$



- b) Tomando la figura del ejercicio 2.3.b, indicar el valor del periodo para las tres funciones graficadas.

Se verifica que:

- $\sin(x) = \sin(x + T)$ con $T = 2\pi$
- $2\sin(x) = 2\sin(x + T) \rightarrow T = 2\pi$
- $\sin(2x) = \sin(2x + 2\pi) = \sin 2\left(x + \frac{2\pi}{2}\right) \rightarrow T = \pi$

Ejercicios:

- $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$
- $y = \sin(4x)$
- $y = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$
- $y = \sin(3x)$

Una propiedad importante de las funciones inducidas por las operaciones seno y coseno es que son periódicas y tienen periodo 2π para el argumento (esto significa que la función repite su comportamiento cada 2π) esto puede observarse en la determinación de seno y coseno en la circunferencia trigonométrica. Por ello:

$$\sin(\alpha) = \sin(\alpha + 2\pi) \text{ y } \cos(\alpha) = \cos(\alpha + 2\pi)$$

1.12. Indicar para las funciones del ejercicio 1.6 cuáles son monótonas. Justificar la respuesta.

a) $y = x^3 - 1$

En la gráfica se observa que **la función crece para todo x** . Para justificarlo se debe verificar la definición de monotonía creciente:

$$x_1, x_2 \in D_f / x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$$x_1^3 + 1 < x_2^3 + 1$$

$$x_1^3 < x_2^3$$

$$x_1 < x_2$$

Como se llega a la condición impuesta en la hipótesis, resulta cierta la suposición de monotonía creciente. Con lo que queda demostrada la condición para todo par de valores de x .

b) $y = \ln(x - 1)$

En la gráfica se observa que **la función crece para todo x** . Para justificarlo se debe verificar la definición de monotonía creciente:

$$x_1, x_2 \in D_f / x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$$\ln(x_1 - 1) < \ln(x_2 - 1)$$

$$x_1 - 1 < x_2 - 1$$

$$x_1 < x_2$$

Con lo que queda demostrada la condición para todo par de valores de x .

Ejercicios propuestos:

Resolver lo pedido con las demás funciones del ejercicio 1.6.

1.13. Hallar las funciones compuestas que se piden a partir de las funciones dadas. Determinar el dominio de las funciones dadas y de las compuestas halladas.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ $g(x) = \ln x$ $f[g(x)]$ y $g[f(x)]$

$$D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \quad D_g = (0, \infty)$$

$$f[g(x)] = \frac{1}{\ln x} \quad D_{f[g(x)]} = (0, 1) \cup (1, \infty)$$

$$g[f(x)] = \ln\left(\frac{1}{x}\right) \quad D_{g[f(x)]} = (0, \infty)$$

Ejercicios:

b) $f(x) = x^2 - 1$ $h(x) = \sqrt{x}$; $f[h(x)]$ y $h[f(x)]$

c) $j(x) = 2 - x$ $g(x) = \frac{1}{x^2}$; $j[g(x)]$ y $g[j(x)]$

GUÍA DE EJERCICIOS TEMA 1

Para comprobar analíticamente, debe probarse que la función compuesta entre ambas es igual a x .

$$\begin{aligned}f[g(x)] &= e^{\ln x - 1 + 1} = e^{\ln x} = x \\g[f(x)] &= \ln e^{x+1} - 1 = (x+1)\ln e^1 - 1 = x\end{aligned}$$

Recordar: Las operaciones exponencial y logarítmica son operaciones inversas entre si:
 $b = \log_a c \rightarrow c = a^b$

Ejercicios:

b) $f(x) = (x - 2)^3$

c) $f(x) = \frac{3x+2}{1-x}$; para $x \neq 1$

d) $f(x) = -\frac{x}{3} + 2$

e) $f(x) = \ln(-x)$

f) $f(x) = \sqrt{2x+3}$

g) $f(x) = \arcsen(x+1)$