MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACIÓN
Universidad Nacional de San Juan

FACULTAD DE INGENIERÍA

Departamento de Matemática

Cátedra: CÁLCULO I – ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Autoría: Equipo de cátedra - 2023

TEMA 2

LÍMITE FUNCIONAL Y CONTINUIDAD

2.1- Noción intuitiva de límite

Comenzamos investigando el comportamiento de la función $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores de *x* cercanos a 2. En la tabla siguiente se dan los valores de *f(x)* para valores de *x* cercanos a 2, pero no iguales a 2.

x	$f(x)$
1.0	2.000000
1.5	2.750000
1.8	3.440000
1.9	3.710000
1.95	3.852500
1.99	3.970100
1.995	3.985025
1.999	3.997001

x	$f(x)$
3.0	8.000000
2.5	5.750000
2.2	4.640000
2.1	4.310000
2.05	4.152500
2.01	4.030100
2.005	4.015025
2.001	4.003001

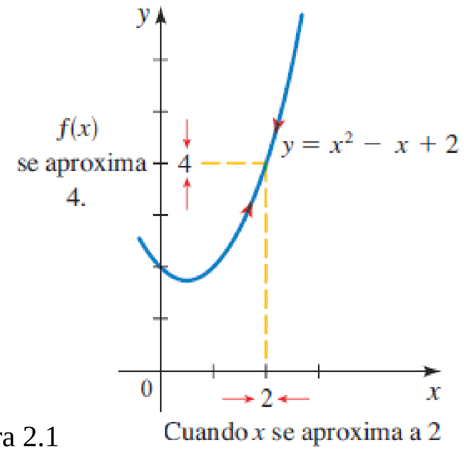


Figura 2.1

De la tabla y la gráfica de f (x) (una parábola) mostrada en la figura 2.1, se puede observar que cuando x está cerca de 2 (en cualquier lado de 2), f(x) está cerca de 4. De hecho, parece que se puede lograr que los valores de *f(x)* se aproximen a 4 tanto como se desee al tomar *x* suficientemente cercana a 2. Esto se expresa diciendo "el límite de la función *f(x)* cuando **x** se aproxima a 2 es igual a 4". La notación para esto es: $\lim_{x \to 2}(x^2 - x + 2) = 4$

A continuación, analicemos, en base a este concepto, una función racional. Debemos precisar algunas definiciones previas.

2.1.1- Entorno de un punto

En la definición intuitiva anterior se habla de acecarse a un punto del dominio (x=2 en el ejemplo) sin llegar a dicho valor.

En matemáticas, este concepto de los puntos alrededor o en la vecindad de un punto se denomina entorno del punto.

Definición:

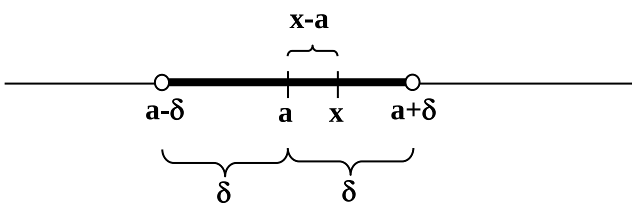
Si "$\boldsymbol{a}$" es un número real, se denomina entorno de dicho punto, al conjunto $\boldsymbol{X}$ que cumple:

$$\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x} \ / \ \boldsymbol{a} - \boldsymbol{\delta_1} < \ \boldsymbol{x} < \ \boldsymbol{a} + \boldsymbol{\delta_2}\} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{a})$$

Donde δ_1 y δ_2 son números cualesquiera positivos.

Para el ejemplo anterior se puede ver que **a = 2** y **δ = 1**

Si **$\delta_1 = \delta_2 = \delta$**, el entorno se llama simétrico, δ se denomina radio y la notación es: $\boldsymbol{E_\delta(a)}$ **(Que se lee entorno de radio delta y centro a)**, es el intervalo abierto $(a-\delta; a+\delta)$.



Se ha visto que: **a-δ < x < a+δ ⇔ -δ < x-a < δ ⇒ │x-a│** < **δ**.

Luego, se puede definir el entorno general simétrico, como el conjunto de puntos **x**, tales que su distancia al punto "**a**" es menor que el radio **δ**.

El entorno simétrico puede clasificarse según el centro como entorno reducido o entorno no reducido:

Entorno Reducido: Si **x ≠ a**, es decir, **0** < **│x-a│** < **δ**. En cuyo caso el centro "**a**" no pertenece a su entorno, el que se denomina reducido y simbólicamente se denota mediante la notación $E'_\delta(a)$. Se representa: $e = \{x/a - \delta < x < a + \ \delta\ , \ \ x \ \neq a\}$

Entorno no reducido: 0 ≤│x-a│ < **δ**, o sea, que el entorno no reducido de "**a**" incluye al centro "**a**" y se denota $\mathbf{E_\delta(a)}$. La primea parte de la desigualdad puede omitirse por ser tivial y dejar **│x-a│** < **δ**.

Observación: En la recta real, entorno de un punto "**a**" es todo intervalo acotado abierto que lo contenga.

2.1.2- Extensión del dominio de una función racional. Introducción a la noción de límite

El **dominio de una función racional** (cociente entre dos polinomios, $P(x)/Q(x)$), es el conjunto de valores que no son raíces del denominador, es decir existe para los valores de *x* para los que no se anula el denominador. Pero puede suceder que el dominio de la misma, sea extendido de manera natural a algunos puntos que son raíces del denominador. El siguiente ejemplo dará precisión a este concepto.

Sea la función de la expresión (1), cuya gráfica se muestra en la figura 2.2.

$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ **(1)**

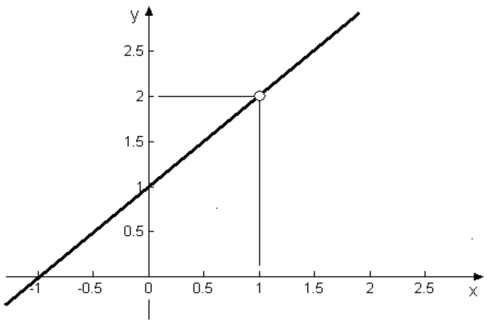


Figura 2.2

Esta función no está definida para $\boldsymbol{x} = \mathbf{1}$, ya que haciendo la correspondiente sustitución en la fórmula, se obtiene la expresión sin sentido: $\frac{0}{0}$. Si consideramos valores próximos a *x*=1, observamos:

x	$(x^2-1)/(x-1)$	x	$(x^2-1)/(x-1)$
0.5	1.50000	1.5	2.50000
0.9	1.90000	1.1	2.10000
0.99	1.99000	1.01	2.01000
0.999	1.99900	1.001	2.00100
0.9999	1.99990	1.0001	2.00010
0.99999	1.99999	1.00001	2.00001

... ...

Las tablas proporcionan valores de *f(x)* (correctos hasta cinco decimales) para valores de *x* que se aproximan a 1 (pero que son distintos de 1). Sobre la base de las tablas podemos inferir que:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

Pero también se puede escribir la *f(x)* así: $f(x) = \frac{(x+1)\,(x-1)}{x-1}$

Simplificando el factor $(x-1)$ resulta: $f(x) = (x+1)$.

Esta función sí está definida en $\boldsymbol{x} = \mathbf{1}$, y toma el valor 2, como puede apreciarse en la figura 2.3.

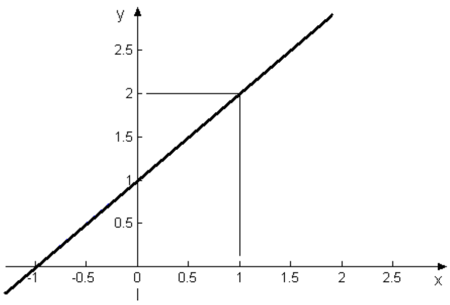


Figura 2.3

Cuando se opera con funciones racionales, se supone que todo factor lineal que aparezca simultáneamente en numerador y denominador, será simplificado y **el dominio de la función ampliado de acuerdo con ello.**

Conforme a lo visto anteriormente, resulta de interés preguntarse acerca de la igualdad o no, de los miembros de la siguiente relación:

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = (x+1) \text{ ¿?} \qquad \textbf{(2)}$$

Para todo valor de $x \neq 1$ la primera y segunda fracción resultan iguales, y para x =1 ambas están sin definir. Para obtener el tercer miembro se ha simplificado el factor (x-1), válido sólo si éste es distinto de cero, es decir si x no es 1.

¿Se puede afirmar que: $\frac{x^2-1}{x-1}$ y $(x+1)$ son iguales? Para valores de x diferentes de 1, sí resultan ser la misma función. Pero para x = 1, no, puesto que para este caso la primera no está definida, mientras que la segunda vale 2. Resulta de especial interés redefinir la primer expresión, para que tome el valor 2 en el punto x =1, donde antes no estaba definida. Esta manera de extender la función “es natural”, mientras que cualquier otra forma de definir el valor de la función en 1 no lo es, dado que si se considera que el valor de x es distinto de 1, pero tan próximo como se desee a él, los tres miembros de **(2)** son iguales; además se puede precisar rigurosamente que cuanto más próximo se tome x de 1, el valor común de las tres funciones se acerca más a 2. En efecto, éstas tomarán valores tan próximos a 2 como se desee, con tal de tomar valores de x distintos de 1, pero suficientemente cercanos al mismo.

Se ve entonces que la manera de extender la definición de $f(x)$ a $\boldsymbol{x}$ **=1** es natural, en el sentido que, cuando la variable independiente x **“tiende a 1”,** el valor de $f(x)$ **“tiende a dos”.**

Abreviando, esta idea puede expresarse simbólicamente como, $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$**,** que se lee: límite de $f(x)$ para x tendiendo a 1 es 2.

Otra forma de verlo es así: Si se realiza el gráfico de la función se obtiene la recta que se muestra en la figura 2.2, que se interrumpe en el punto x =1. Si se grafica la función *(x +1)*, figura 2.3, se observa que ambas figuras coinciden, salvo para el valor x =1, en el que la segunda no presenta tal interrupción.

Queda claro que si la función **(1)** se redefiniera de modo tal que el valor de $f(1)$ fuese cualquier otro distinto de 2, el gráfico de $f(x)$ se interrumpiría en el punto $x = 1$.

Nota: Adviértase que tiene sentido aplicar el concepto que se está desarrollando, sólo en aquellos puntos donde la grafica de la función se interrumpe, esto es, la noción de límite está relacionada al comportamiento de la función en un entorno reducido del punto en estudio, puesto que, como se verá, si en un punto la gráfica no se interrumpe, el valor del límite en el mismo coincide con el valor de la función en él.

2.2- Límite de una función

2.2.1- Definición de límite

Se examina el caso de la variación de una función cuando la variable x tiende a un valor x_0. Se supone que la función $y = f(x)$ está definida, en un entorno reducido del punto x_0, o al menos en cierto conjunto de puntos del mismo.

Si L es el límite de la función $f(x)$, cuando $x \to x_0$, se denota:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ o bien $f(x) \to L$ cuando $x \to x_0$

Definición de $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L}$

*La función **y = f(x)** tiende al límite **L** cuando **x** tiende a **x_0** si para cada número real positivo **ε**, por pequeño que éste sea, es posible hallar un número real positivo **δ**, función de **ε**, tal que para todos los valores de **x**, diferentes de **x_0**, que satisfagan la desigualdad: **0<|x-x_0|<δ**, se verifique la desigualdad: **|f(x)-L|<ε**.*

Expresar en forma simbólica la definición, es conciso y puede facilitar recordarla. A continuación se dan 3 definiciones símbólicas de lo mismo, utilizando distintos conceptos.

Utilizando el concepto de valor absoluto (la misma que en palabras), la definicón queda:

$$\lim_{x\to x_0} f_{(x)} = L \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{\varepsilon}>0, \exists \delta_{(\varepsilon)} > 0 / \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Longmapsto \left|f_{(x)} - L\right| < \varepsilon$$

Utilizando el concepto de intervalo, la definición se expresa:

$$\lim_{x\to x_0} f_{(x)} = L \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x_0}; x \in (\boldsymbol{x_0} - \delta;\ x_0 + \delta)\ e\ y \in (L - \varepsilon; L + \varepsilon)$$

Empleando el concepto de entorno:

$$\lim_{x\to x_0} f_{(x)} = L \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{\varepsilon}>0, \exists\, \boldsymbol{\delta_{(\varepsilon)}} > 0 / \forall x \in E'_{\delta}(x_0) \Longrightarrow f(x) \in E_{\varepsilon}(L)$$

2.2.2- Interpretación gráfica del límite

En la figura 2.4 se muestra la interpretación gráfica de este concepto, para ello se trazan las rectas horizontales, de ecuación:

$$\boldsymbol{y = L - \varepsilon} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{y = L + \varepsilon}$$

El enunciado de la definicón, afirma que por cercanas que estén dichas rectas entre sí, si el límite es ***L*,** siempre es posible determinar, una franja vertical, limitada por las rectas: $\begin{cases} \boldsymbol{x = x_0 - \delta} \\ \boldsymbol{x = x_0 + \delta} \end{cases}$,

tal que todo punto de la gráfica de $\boldsymbol{y = f(x)}$ que esté contenido en esta franja vertical, excepto tal vez $(x_0\ ;\ f(x_0))$, estará contenido en la franja limitada por las dos rectas horizontales $\boldsymbol{y = L - \varepsilon}$ e $\boldsymbol{y = L + \varepsilon}$.

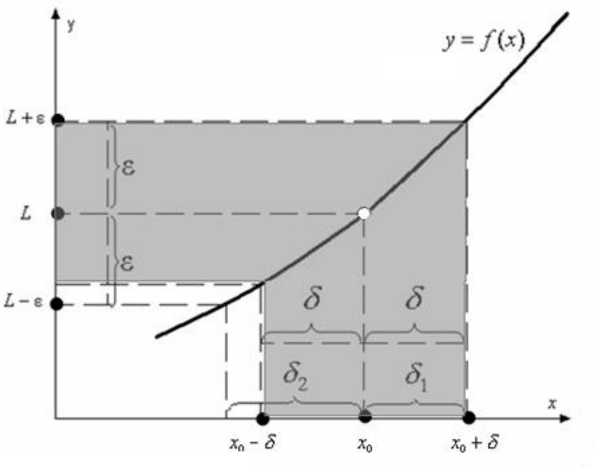


Figura 2.4

Obsérvese que se toma $\delta = min\ (\delta 1,\ \delta 2)$

Como en un entorno reducido es $x \neq x_0$, en la definición de límite no intervienen más que los valores de la función $y = f(x)$ en la proximidad de $x = x_0$, pero no en x_0; en el cual la función puede no tener valor, o tener uno que interrumpa la gráfica.(Ver Figuras 2.5 y 2.6). lo que interesa es el comportamiento de *f(x) "cerca" de* x_0.

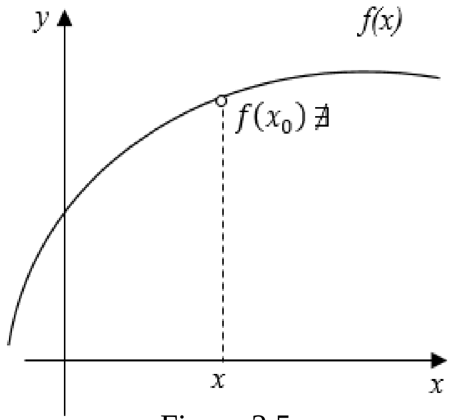


Figura 2.5

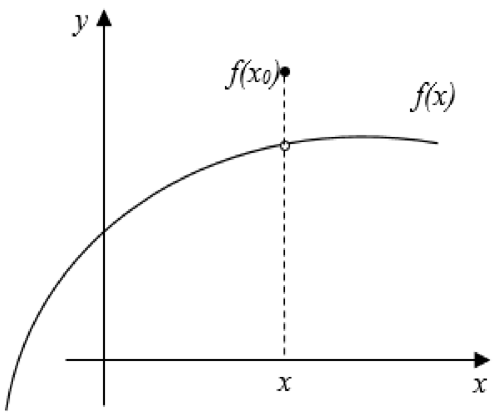


Figura 2.6

Ejemplo 1:¿Qué tan cerca de $x_0 = 4$ se debe mantener el valor de x para estar seguro de que el resultado de $\boldsymbol{y = 2x - 1}$, esté a menos de 2 unidades de $\boldsymbol{y = 7}$? Ver figura 2.7.

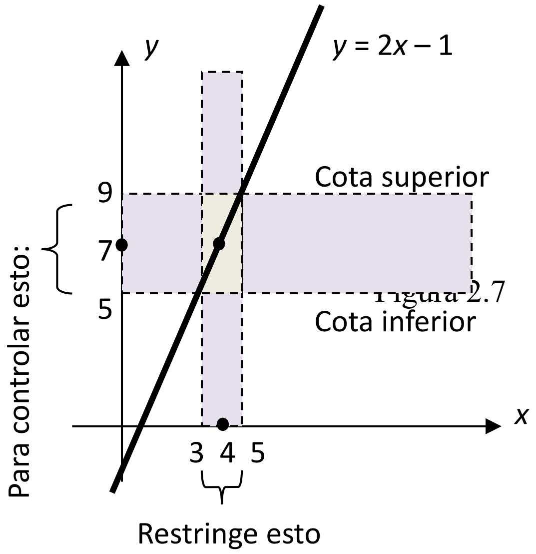
Expresando la pregunta como ecuación: ¿Para qué valores de x es $|\ y - 7\ | < 2$?

$$|\ y - 7\ | = |\ (2x - 1) - 7\ | = |\ 2x - 8\ |$$

ó $|\,2x - 8\,| < 2$

Resolviendo:

$-1 < x - 4 < 1 \quad \rightarrow \quad 3 < x < 5$



Ejemplo 2:¿Por qué las marcas de un recipiente de medir volumen, de un litro de capacidad, en general se encuentran a una distancia de un milímetro una de otra?

Si el recipiente es un cilindro circular recto de 6 cm de radio, el volumen es: $V = \pi r^2 h = 36\pi h$ ¿Con qué precisión se debe evaluar h para medir 1 litro (1000 cm^3) con un error no mayor de 1% (10 cm^3)?

Valores de h que satisfacen:

$$|\,V - 1000\,| = |\,36ph - 1000\,| \leq 10$$

$$|\,36ph - 1000\,| \leq 10$$

$$-10 \leq 36ph - 1000 \leq 10$$

$$990 \leq 36ph \leq 1010$$

$$990\,/36p \leq h \leq 1010\,/36p$$

$$8.8 \leq h \leq 8.9$$

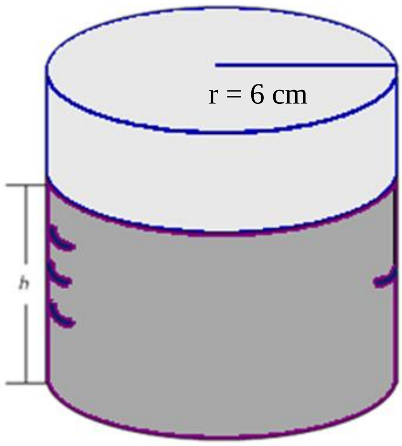


Figura 2.8

$8.9 - 8.8 = 0.1\,cm = 1\,mm$ (distancia entre marcasen el recipiente)

2.2.3 - Ejemplo resuelto utilizando software

Determinar el valor de $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x}$ y graficar la función.

Usando el software Geogebra. En el campo de entrada se escribe:

y= (1-cos x)/x , luego:

L= Limite[f(x), 0] , dando por resultado:

L=0

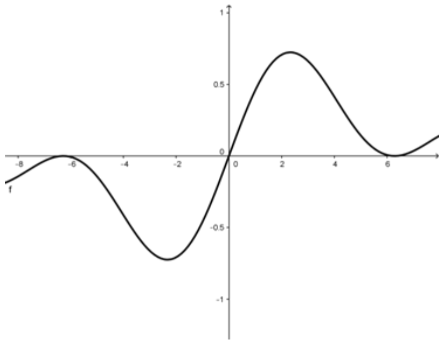


Figura 2.9

Observación :
Observe que en la gráfica obtenida con GeoGebra, figura 2.9, debería aparecer un "hueco" en el punto (0,0), indicando que para este valor la función no está definida. Sin embargo muchos softwares omiten graficar estos "huecos". Como se estudirá más adelante, se trata, en ese punto, de una discontinuidad evitable.

2.3- Límites Laterales

*Si al tender x por izquierda a cierto valor x_0, es decir tomando sólo valores inferiores a x_0, f(x) tiende al valor L_1, este valor se denomina **límite lateral por izquierda** en el punto x_0, y simbólicamente se denota:*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L_1$$

En caso que x tome sólo valores mayores que x_0 la notación será:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_2$$

*Siendo L_2 **el límite por derecha de la función** en el punto x_0.*

*Se puede demostrar que si los límites por derecha y por izquierda existen y son iguales, es decir, si $L_1 = L_2$, entonces el límite L de esta función en el punto x_0, existe en el sentido definido en 2.2.1 y **resulta L =L_1 =L_2**. Recíprocamente, si una función tiene un límite L en el punto x_0, los límites de esta función en el punto x_0, por derecha y por izquierda existen y son iguales.*

Ejemplo 1: Calcular $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{|x-3|}{x-3}$

Teniendo en cuenta que:

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & si \quad x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \\ -(x-3) & si \quad x-3 \leq 0 \Rightarrow x \leq 3 \end{cases}$$

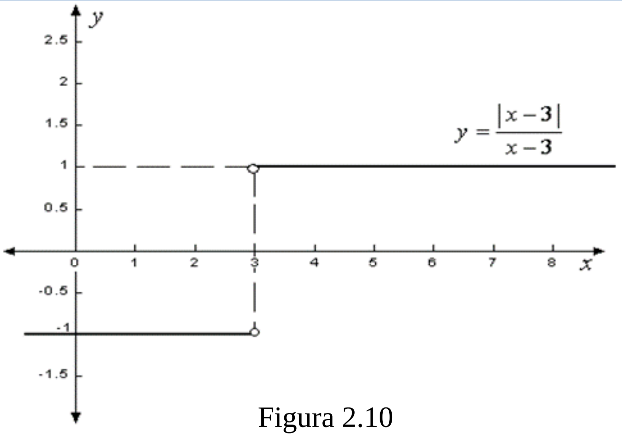


Figura 2.10

Esto es: $\dfrac{|x-3|}{x-3} = \begin{cases} 1 & si \quad x > 3 \\ -1 & si \quad x < 3 \end{cases}$

Entonces:

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{|x-3|}{x-3} = 1; \qquad \lim_{x \to 3^-} \frac{|x-3|}{x-3} = -1$$

Como $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{|x-3|}{x-3} \neq \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{|x-3|}{x-3}$; entonces el $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{|x-3|}{x-3}$ no existe.

Ejemplo 2: La función $y = sen\,\dfrac{1}{x}$, definida para todos los valores de x excepto el cero ($x \neq 0$), no tiende a ningún límite finito, ni tampoco infinito cuando $x \to 0$.

Utilizando Geogebra para graficar y resolver, se tiene:

L=Limite[f(x),0]   , da por resultado:

L= indefinido

L1=LimiteDerecha[f(x),0]   , da por resultado:

L1= indefinido

L2=LimiteIzquierda[f(x),0]   , da por resultado:

L2= indefinido

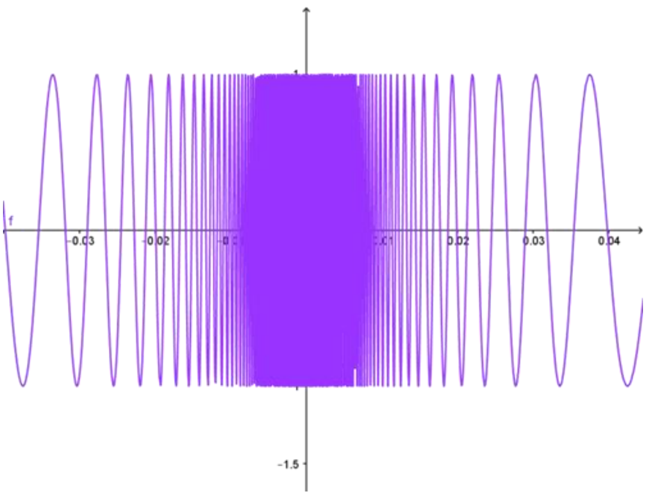


Figura 2.11

***L_1* y *L_2* no existen, luego *L* no existe.**

Esta misma situación se plantea en la función: $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ sen\ \frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$

La función no tiene límite cuando x tiende a cero.

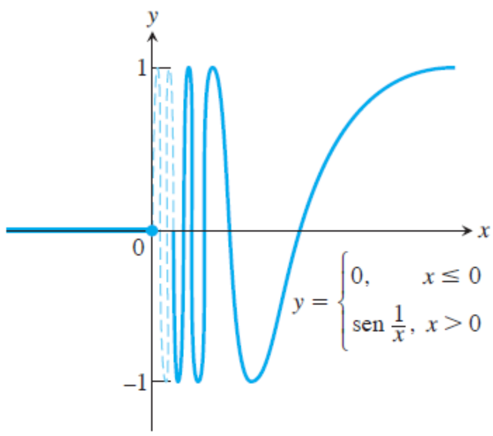


Figura 2.12

En los últimos casos vistos, se dice que no existe el límite. Puesto que o no existen ambos límites, o no existe uno de ellos, o existiendo ambos son distintos.

A continuación se examina un caso en el que existen y resultan iguales los límites laterales.

Ejemplo 3: Resolver y graficar $\lim_{x \to 2} f(x) =$

$L1 = \lim_{x \to 2^-} x^2 = 4$ $\qquad$ $L2 = \lim_{x \to 2^+} 6 - x = 4$

$\boldsymbol{L_1 = L_2 = L = 4}$

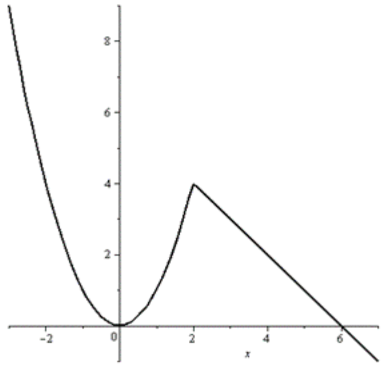


Figura 2.13

2.4- Límite para x→∞ o límite en infinito

Se analiza el límite de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando $x \to \infty$.

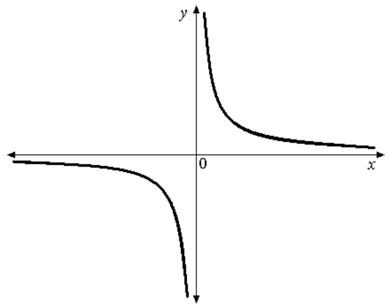


Figura 2.14

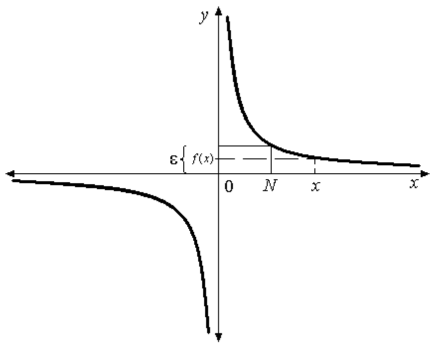


Figura 2.15

Obsérvese que cuando $x \to \infty$, $f(x) \to 0$. Este concepto podría expresarse formalmente del siguiente modo:

La función $y = f(x)$ tiende al límite L cuando $x \to \infty$, si para todo número positivo ε, por pequeño que sea, se puede encontrar un número positivo $N(\varepsilon)$, tal que para todos los valores de x que satisfagan la desigualdad $x > N$, se cumpla la desigualdad: $|f(x) - L| < \varepsilon$ (Figura 2.15).

Simbólicamente: $\lim_{x \to \infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon \rangle 0,\ \exists N \in \Re^+ / \forall x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Conociendo el significado de los signos: $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$, se evidencia el de las expresiones: $f(x)$ tiende a L cuando $x \to +\infty$ y $f(x)$ tiende a L cuando $x \to -\infty$; las cuales simbólicamente se pueden escribir así:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \ ; \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

2.5- Función que tiende a infinito

Se examinaron los casos en que la función $f(x)$ tiende a cierto límite L cuando $x \to x_0$ ó $x \to \infty$. Se verá el caso, en que la función $y = f(x)$ tiende a infinito, cuando la variable x tiende a x_0.

La función $y = f(x)$ tiende a infinito cuando $x \to x_0$ si para cualquier número positivo M**,** por grande que sea, se puede encontrar un valor $\delta_{(M)} > 0$ tal que, para todos los valores de x diferentes de x_0 y que satisfagan la condición: $0 < |x - x_0| < \delta$, se verifique la desigualdad: $|f(x)| > M$, (Figura 2.16) Si *f(x)* tiende a infinito cuando $x \to x_0$, se escribe: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ ó $f(x) \to \infty$ cuando $x \to x_0$.

Simbólicamente podemos decir:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \iff \forall M \in R^+ \ \exists\, \delta(M) > 0 \ / \forall x \neq x_0 \ \ 0 < |x - x_0| < \delta \mapsto |f(x)| > M$$

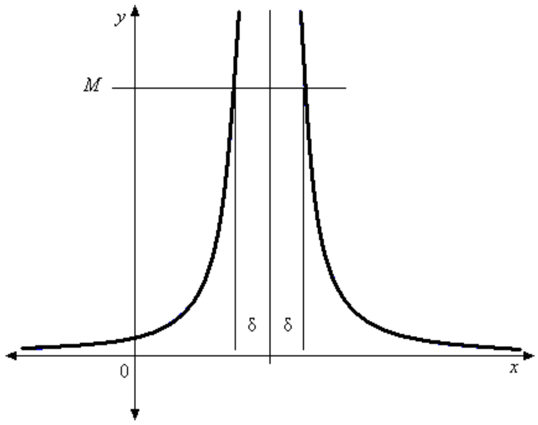


Figura 2.16

Si $f(x)$ tiende a infinito cuando $x \to x_0$, tomando valores positivos únicamente, se expresa: $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$. Si sólo toma valores negativos, simbólicamente se formula: $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

Ejemplo1: Demostrar que: $\lim_{x \to 1} \dfrac{1}{(1-x)^2} = +\infty$

En efecto cualquiera que sea *M* > *0* tenemos:

$$\frac{1}{(1-x)^2} > M \qquad \text{siempre que:} (1-x)^2 < \frac{1}{M} \quad \text{o sea} \quad |1-x| < \frac{1}{\sqrt{M}} = \delta$$

La función $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ toma solo valores positivos. Si la función tiende a ∞ cuando $x \to \infty$ se escribe: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

En general, puede expresarse:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty \ ; \ \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \ ; \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Por ejemplo: $\lim_{x \to \infty} x^2 = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$; etc.

Nota: No es forzoso que la función $f(x)$ tienda a un límite, finito o infinito, cuando $x \to x_0$ ó $x \to \infty$. Es decir no siempre existe límite, como puede apreciarse en el ejemplo siguiente:

Ejemplo 2: La función *y* = *sen x*, está definida en el intervalo infinito $-\infty < x < +\infty$, pero no tiende a un límite finito ni infinito a medida que $x \to \infty$, puesto que varía indefinidamente entre 1 y -1 sin tender a tomar un valor en particular, (figura 2.17):

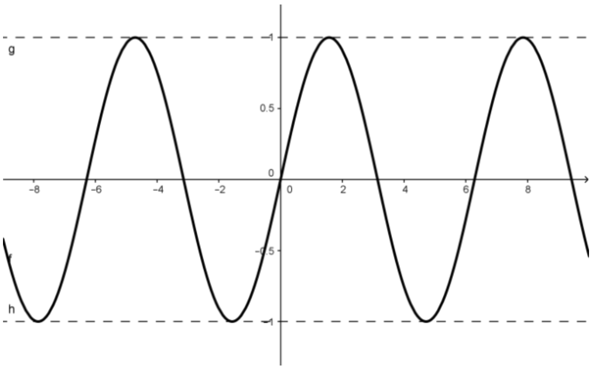


Figura 2.17

2.6 -Función acotada

Definición: *La función $y = f(x)$ se denomina "**acotada**" en el dominio de definición de la variable x si existe un número real positivo "M" tal que, para todos los valores de x pertenecientes a dicho dominio se verifica la desigualdad:* $|f(x)| \leq M$ *. Que es equivalente a: $-M \leq f(x) \leq M$.*

Si tal número *"M"* no existe, se dice que la función *y =f(x)* no es acotada en dicho dominio, Figura 2.18**.**

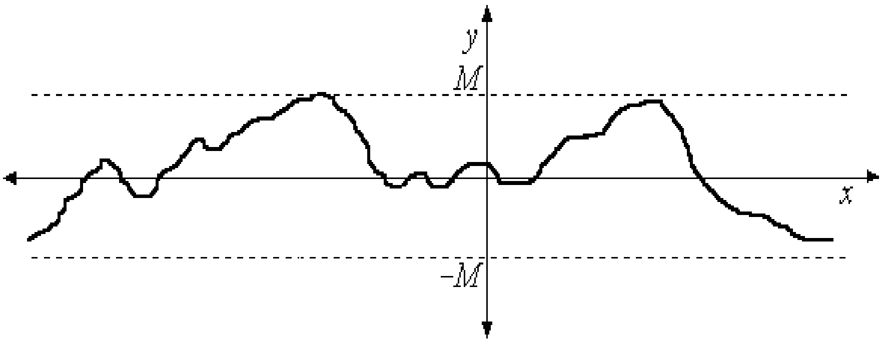


Figura 2.18

Ejemplo 1: La función *y = senx***,** definida en el intervalo infinito $-\infty < x < +\infty$, está acotada, puesto que para todos los valores de *x* se verifica: $|sen\ x| \leq 1 = M$, Figura 2.17

Función acotada en un punto: La función *y = f(x)* se dice acotada cuando $x \to x_0$, si existe un entorno, con centro en el punto x_0 en el cual dicha función está acotada.

La función *y = f(x)*, se denomina acotada cuando $x \to \infty$ si existe un número real *N > 0* tal que, para todos los valores de *x* que satisfagan la desigualdad *x > N***,** la función *f(x)* está acotada.

Determinar si la función *f(x)* está acotada o no, aplicando limite, se resuelve por medio del siguiente teorema:

Teorema: Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, siendo L un número finito, la función *y = f(x)* está acotada en x_0 cuando $x \to x_0$

Demostración:

De la igualdad $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, se deduce que para cualquier $\varepsilon > 0$ se encontrará un número δ, función de ε, tal que en el entorno: $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ se cumple la desigualdad:

$$\left| f(x) - L \right| < \varepsilon, \ como \ \left| f(x) \right| - \left| L \right| \le \left| f(x) - L \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| f(x) \right| \le \left| L \right| + \varepsilon \Rightarrow \left| f(x) \right| \le M$$

Esto significa precisamente Por propiedades del valor absoluto que la función *y = f(x)* está acotada, cuando $x \to x_0$.

De la definición de función acotada, se deduce que si: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ *ó* $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, es decir, si *f(x)*es infinitamente grande, esta función no está acotada.

Ejemplo 2: La función: $y = x \, sen \, x$ cuando $x \to \infty$ no está acotada, ya que para cualquier $M > 0$, por grande que éste sea, se pueden encontrar valores de *x* tales que $\left| x \ sen \ x \right| > M$. Pero la función *y = x. sen x*, no es infinitamente grande, puesto que se anula cuando $x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$. Figura 2.19.

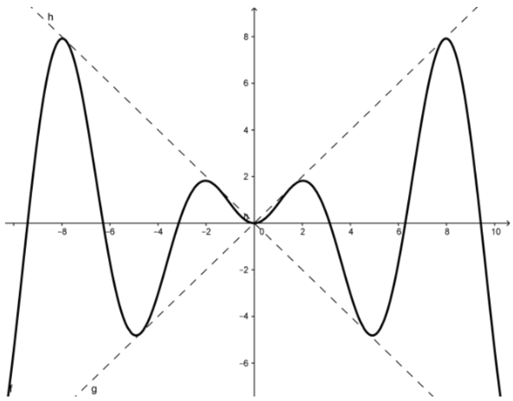


Figura 2.19

2.7-Límites indeterminados

Son siete los casos de límites indeterminados que se presentan en la práctica, y están representados por los siguientes símbolos: $\infty - \infty$; $0 \, . \, \infty$; $\dfrac{0}{0}$; $\dfrac{\infty}{\infty}$; 0^0; ∞^0; $1^{\pm\infty}$

Si se parte de la base que $\infty - \infty$ es indeterminado, todos los casos anteriores se reducen a éste, con sólo tomar logaritmo natural.

No se pueden establecer criterios generales para asegurar la convergencia en cada caso, ni aún sabida ésta pueden darse reglas que permitan hallar el límite.

Operaciones tales como factoreo, simplificación, racionalización, etc., pueden ser útiles para salvar la indeterminación.

Cuando estos recursos son insuficientes, para resolver ciertos casos de indeterminación se emplea la Regla de Bernoulli L´Hospital, que se verá en el Tema 4.

Ejemplo 1: Hallar $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$; $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4} \qquad \text{(Simplificando queda salvada la indeterminación)}$$

Ejemplo 2: Hallar $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}$; $(\infty - \infty)$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right).\left(\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)} =$$

Se aplico la propiedad de multiplicar y dividir por el conjugado.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x}{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{x}}+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}+1} = \frac{1}{2}$$

2.8-Teoremas fundamentales sobre límites

En este apartado se consideran teoremas sobre funciones que dependen de una misma variable *x;* y en las cuales $x \to a$ ó $x\to\infty$. Por ser análogas las demostraciones para todos los casos, se desarrolla sólo una, omitiendo incluso las notaciones $x \to a$ ó $x\to\infty$ (que se consideran sobreentendidas).

Teorema 1:

El límite de la suma algebraica de dos, tres,... y en general de un número finito de funciones; es igual a la suma algebraica de los límites de estas funciones.

$$\lim(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_K) = lím\ \mu_1 + lím\ \mu_2 + \ldots + lím\ \mu_K$$

Demostración: Se toman solo dos, pero la demostración es análoga para cualquier número de sumandos.

Suponiendo que: $lím\ \mu_1 = a_1; lím\ \mu_2 = a_2$

Basado en el teorema 1 sobre infinitésimos se puede escribir:

$$\mu_1 = a_1 + \alpha_1 \quad ; \quad \mu_2 = a_2 + \alpha_2$$

Donde α_1 y α_2 son infinitésimos. Por lo tanto:

$$\mu_1 + \mu_2 = (a_1 + a_2) + (\alpha_1 + \alpha_2)$$

Puesto que $(a_1 + a_2)$ es una constante y $(\alpha_1 + \alpha_2)$ es un infinitésimo, entonces de acuerdo con el Teorema 1 resultará que:

$$lím\,(\mu_1 + \mu_2) = (a_1 + a_2) = lím\ \mu_1 + lím\ \mu_2$$

Ejemplo 1: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + 2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \dfrac{2}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} 1 + \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{x} = 1$

Teorema 2:

El límite del producto de dos, tres, y en general de un número finito de funciones, es igual al producto de los límites de estas funciones:

$$\lim\ (\mu_1 . \mu_2 . \dots\ \mu_K) = lím\ \mu_1\ .\ lím\ \mu_2 \dots .\ lím\ \mu_K$$

Corolario: *Un factor constante se puede extraer fuera del signo de límite.*

En efecto, si $lím\ \mu = a$ y *C= cte.* se tiene: *lím C= C* de donde

$\lim(C.\mu) = lím\ C\ .\ lím\ \mu = C.lím\,\mu$ Con ello queda demostrado.

Ejemplo 2: $\lim\limits_{x\to 2} 5\,x^3 = 5.\lim\limits_{x\to 2}\ x^3 = 5\ .\ 2^3 = 5\ .\ 8 = 40$

Teorema 3:

El límite del cociente de dos, tres, y en general de un número finito de funciones, es igual al cociente de los límites de estas funciones, siempre que el límite del denominador sea distinto de cero.

$$\lim \frac{\mu}{\nu} = \frac{lím\ \mu}{lím\ \nu}\ ; \text{Siempre que } lím\ \nu \neq 0$$

Ejemplo 3: Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x+5}{4x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(3x+5)}{\lim\limits_{x\to 1}(4x-2)}=\frac{3\lim\limits_{x\to 1}x+5}{4\lim\limits_{x\to 1}x-2}=\frac{3\,.\,1+5}{4\,.\,1-2}=\frac{8}{2}=4$$

En este ejemplo ha sido posible utilizar el Teorema del Límite del cociente de dos funciones, porque el límite del denominador cuando $x\to 1$, es distinto de cero.

Pero si el límite del denominador fuera cero, no se podría aplicar al Teorema 3. En este caso sería necesario realizar algunas simplificaciones u otros procedimientos algebraicos o bien aplicar la Regla de Bernoulli-L´Hospital.

Ejemplo 4: Determinar $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

El numerador y el denominador tienden a cero cuando $x\to 2$, y por lo tanto no se puede aplicar el Teorema anterior. Se realizan algunas simplificaciones:

$$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}=x+2$$

Este procedimiento es válido para todos los valores de *x*distintos de 2. Por lo tanto teniendo en cuenta la definición de límite se puedeescribir:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

Ejemplo 5: Hallar $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x-1}$

Cuando $x\to 1$ el denominador tiende a cero, mientras que el numerador tiende a 1; por consiguiente, el límite de la función inversa de la dada es cero, es decir:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x-1)}{\lim\limits_{x\to 1}x}=\frac{0}{1}=0$$

De aquí se deduce, según el Teorema 2 sobre infinitésimos, que: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x-1}=\infty$

Observación: Sean dos funciones tales que $f(x)<g(x)\ \forall\ x\in(Df\cap Dg)$, en un entorno de x_0, excepto tal vez para el punto $x_0\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ (Figura 2.25).

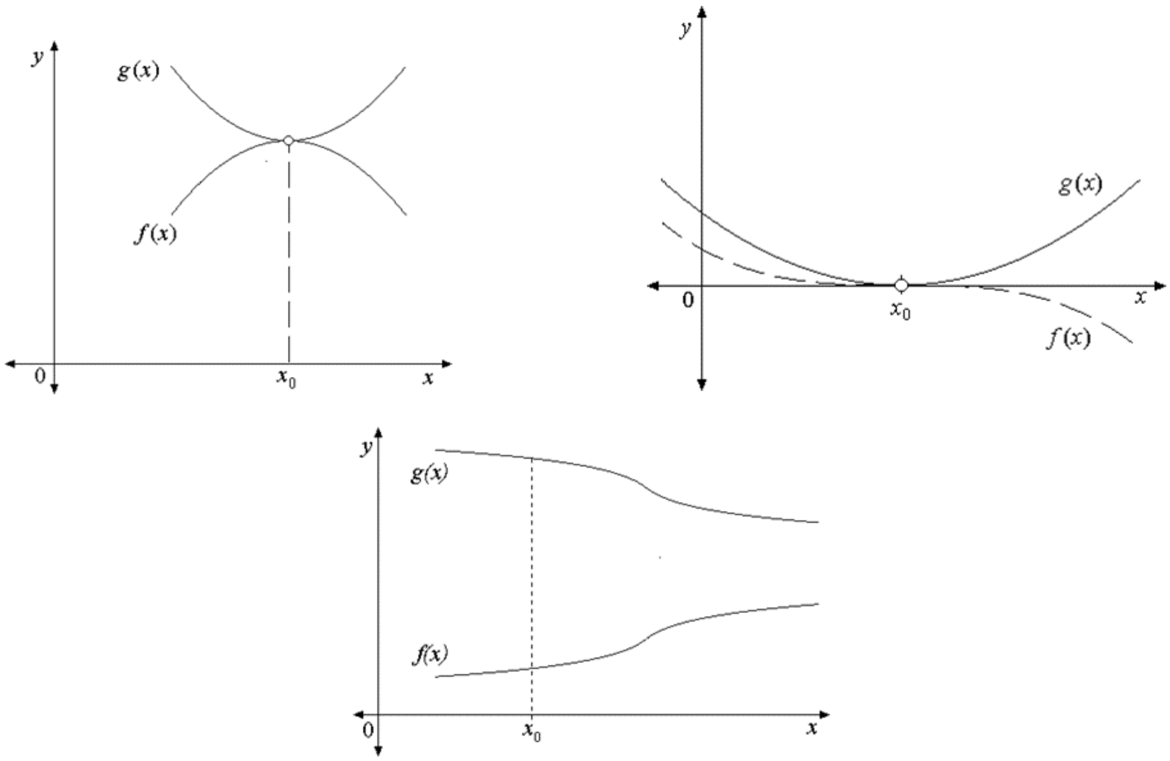
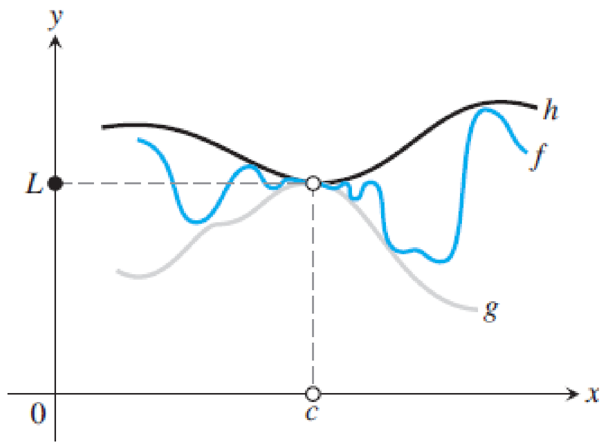


Figura 2.25

Teorema 4: Teorema de la compresión.

Si las tres funciones g(x), f(x) y h(x) están relacionadas entre si por la doble desigualdad $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ *y si g(x) y h(x), tienden a un mismo limite L, cuando* $x \to c$, *(o cuando* $x \to \infty$*); entonces se puede afirmar que la función f(x), también tiende a este mismo limite cuando* $x \to c$,*(o cuando* $x \to \infty$*)*

Este teorema permite calcular una variedad de límites. Se refiere a una función f cuyos valores quedan entre los valores de otras dos funciones, g y h, que tienen el mismo límite L en el punto c. Al quedar "atrapados" entre los valores de dos funciones que se aproximan a L, los valores de f tambien deben aproximarse a L, como se observa en la siguiente figura.



Un ejemplo de su aplicación se verá en el apartado 2.10.

2.9 -Infinitésimos y sus propiedades fundamentales

Para el cálculo del límite es muy importante la consideración de las funciones con límite cero.

Definición:

La función $\alpha = \alpha(x)$ *se denomina* ***infinitésimo*** *cuando* $x \to a$ *o cuando* $x \to \infty$, *si*

$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0$ *ó* $\lim_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$

De la definición del límite se deduce que si, por ejemplo: $\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0$, entonces, para cualquier número positivo ε prefijado y arbitrariamente pequeño, se podrá encontrar un $\delta > 0$ tal que para todas las *x* que satisfagan la condición $0 < |x - a| < \delta$, se tendrá: $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Por ejemplo, *cos x* es infinitésimo para $x \to \frac{\pi}{2}$ y no lo es para $x \to 0$.

La condición esencial del infinitésimo es la variabilidad y tener por límite 0. Hablar de números no nulos infinitamente pequeños es un contrasentido porque siendo un número (Por tanto invariable, constante), si no es nulo no puede llegar a ser menor que cualquier otro número ε, que es la condición esencial del infinitésimo.

Ejemplo 1: La función (Figura 2.20) $\alpha(x) = (x-1)^2$ es un infinitésimo cuando $x \to 1$ porque

$$\lim_{x \to 1} \alpha(x) = \lim_{x \to 1} (x-1)^2 = 0$$

Ejemplo 2: La función (Figura 2.21) $\alpha(x) = \frac{1}{x}$ es un infinitésimo cuando $x \to \infty$ ya que

$$\lim_{x \to \infty} \alpha(x) = 0 .$$

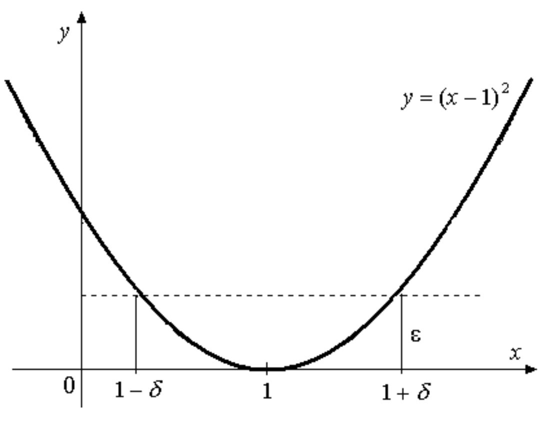


Figura 2.20

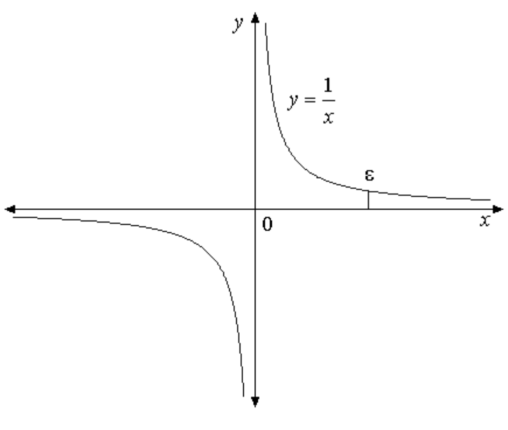


Figura 2.21

Teorema: Si la función $y = f(x)$ puede expresarse como la suma de un número L y de un infinitésimo $\alpha(x)$ (Para $x \to a$ o para $x \to \infty$), entonces *lim f(x)= L* (para $x \to a$ o para $x \to \infty$). Es decir si *f(x)= L+* $\alpha(x)$ $\Rightarrow$ *lim f(x)= L* (Para $x \to a$ o para $x \to \infty$).

Resumiendo: Si f(x) = L+ $\alpha(x)$ $\Rightarrow$ ***lim f(x)=L (Para x→a o para*** $x \to \infty$***).***

Es decir, "toda función con límite, es igual a éste más un infinitésimo; y recíprocamente: Si a una constante se le suma un infinitésimo, la función obtenida tiene por límite dicha constante" ya sea que el límite se tome para $x \to a$ ó para $x \to \infty$. La Figura 2.22 muestra una interpretación gráfica del enunciado.

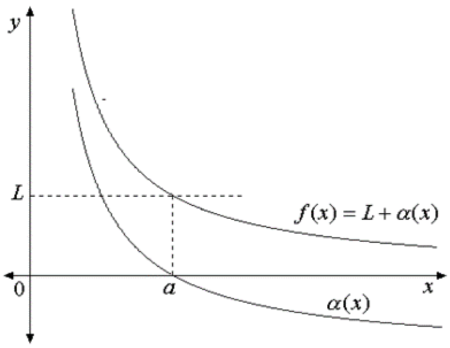


Figura 2.22

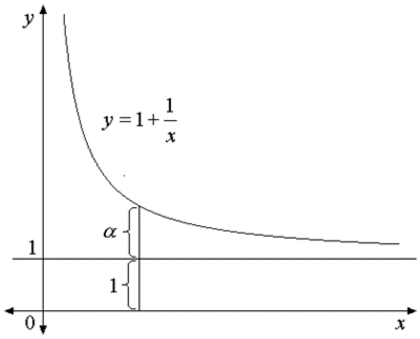


Figura 2.23

Nota: Lo dicho también vale para $x \to \infty$

Ejemplo 3: Dada la función $y = 1 + \dfrac{1}{x}$ es evidente que $\lim\limits_{x \to \infty} y = 1$

Recíprocamente también vale: Si $\lim\limits_{x \to \infty} y = 1$, la variable **y** puede expresarse por la suma del límite 1 y de un infinitésimo $\alpha = \dfrac{1}{x}$ es decir $y = 1 + \alpha$ o sea $y = 1 + \dfrac{1}{x}$. Ver Figura 2.23

Esto es: *Lim f(x) =L* $\Leftrightarrow$ ***f(x)=L+*** α ***(x), para x*** $\to$ ***a ó x*** $\to \infty$

2.9.1 -Comparación de infinitésimos

En el siguiente ejemplo se puede observar, Figura 2.24, que en general, diferentes funciones tienden a cero con distinta "*rapidez*" (sin querer con ello hacer referencia a un concepto relacionado con el tiempo, como es la velocidad).

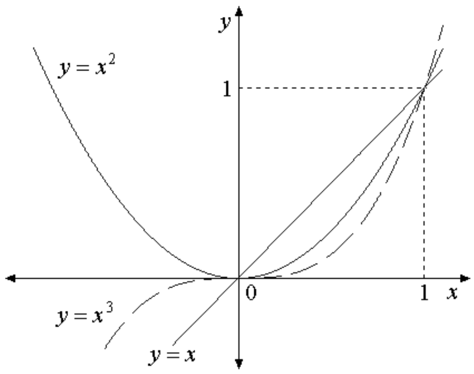


Figura 2.24

Obviamente, cuando $x \to x_0$, $y = x^3$ tiende "*más rápidamente*" a cero que $y = x^2$, y éste a su vez "*más rápido*" que $y = x$.

Este concepto da a lugar a lo siguiente: Se supone que varios infinitésimos α, β, γ son funciones de la misma variable *x*, y tienden a cero cuando $x \to a$ o cuando $x \to \infty$. Se analiza la razón de estos infinitésimos.

Definición 1:

Si la razón $\dfrac{\beta}{\alpha}$ tiene un límite finito y distinto de cero; es decir, que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\beta}{\alpha} = A \neq 0$ y por lo tanto $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{1}{A} \neq 0$; se dice que α *y* β son **infinitésimos del mismo orden.**

Ejemplo 1: Supóngase que $\alpha = x$; $\beta = sen\ 2x$ donde $x \to 0$. Los infinitésimos α *y* β son del mismo orden, porque:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x \to 0} \frac{sen\ 2x}{x} = 2, \quad \text{puesto que} \quad \lim_{x \to 0} \frac{2\ sen\ 2x}{2x} = 2$$

y teniendo en cuenta que: $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{sen\,\alpha}{\alpha} = 1$ (se demostrará en la siguiente sección)

Ejemplo 2: Cuando $x \to 0$, los infinitésimos *x; sen 3x; tg 2x* son todos del mismo orden. La demostración es análoga a la del ejemplo anterior.

Definición 2:

Si la razón $\dfrac{\beta}{\alpha}$ de dos infinitésimos tiende a cero, es decir, si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$ (y por consiguiente $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha}{\beta} = \infty$), entonces el infinitésimo β se dice que es un **infinitésimo de orden superior con relación** a α y recíprocamente: α será un **infinitésimo de orden inferior con relación** a β.

Ejemplo 3: Supongamos que $\alpha = x$; $\beta = x^n$; $n > 1$; $x \to 0$.

El infinitésimo es de orden superior con relación a α ; puesto que: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^n}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x^{n-1} = 0$

Recíprocamente, el infinitésimo α es de orden inferior a β.

Definición 3:

Se dice que β es **infinitésimo de orden K respecto** a α , *si* β *y* α^K son infinitésimos del mismo orden, es decir si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\beta}{\alpha^K} = A \neq 0$

Ejemplo 4: Si $\alpha = x$; $\beta = x^3$; entonces cuando $x \to 0$, el infinitésimo β es de 3er orden respecto a α ; puesto que: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\beta}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x^3} = 1$

Definición 4:

Si la razón de dos infinitésimos $\dfrac{\beta}{\alpha}$ tiende a 1 es decir, si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha}{\beta} = 1$; los infinitésimos α y β se denominan**equivalentes** y se escribe $\alpha \approx \beta$.

Ejemplo 5: Supóngase que $\alpha = x$; $\beta = sen\, x$; si $x \to 0$ los infinitésimos α y β son equivalentes, porque: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\, x}{x} = 1$

Definición 5:

Si la relación $\dfrac{\alpha}{\beta}$ no tiene límite (finito o infinito), entonces α y β no son comparables en el sentido mencionado antes.

2.10-Comparación de infinitésimos Equivalentes de Funciones trigonométricas:

Es posible demostrar que las funciones $sen\, x$, x y $tg\, x$, son infinitésimos equivalentes cuando $x \to 0$. Esto significa que si en la resolución de algún límite aparece la siguiente expresión:

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

Y además $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ son algunas de las tres funciones indicadas (es decir $sen\, x$, x o $tg\, x$), entonces, el valor del límite L, por comparación de infinitésimos equivalentes es directamente igual a uno.

Esto se puede demostrar para todos los casos posibles, (todas las combinaciones de cocientes entre las funciones nombradas) Acontinuación se muestra la demostración para el caso $\alpha(x) = sen\,x \;\; y \;\; \beta(x) = x$. En la desmotración se emplea el teorema 4 : "Teorema de la Compresión". Se pueden demostrar los restantes casos de forma similar:

Comparación de los infinitésimos $sen\,x$ y x para $x \to 0$:

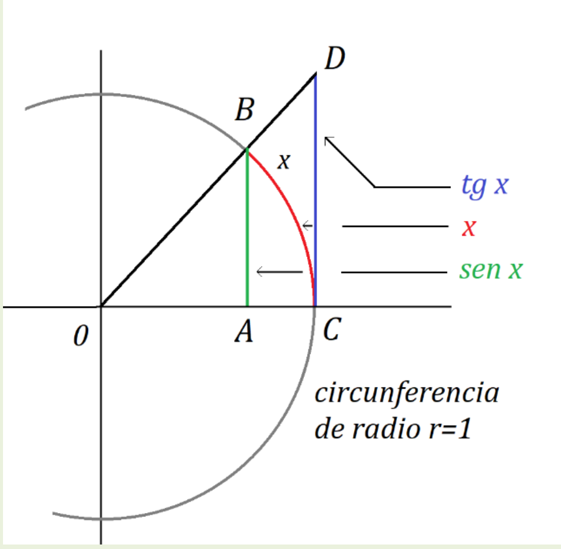


Figura 2.26

El Segmento $\overline{CB}$ corresponde al arco de circunferencia en rojo, que es el ángulo x expresado en radianes.

El Segmento $\overline{AB}$ corresponde al seno del ángulo x

El Segmento $\overline{CD}$ corresponde al la tangente del ángulo x

Demostración: A continuación se probará que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen\,x}{x} = 1$

Según la figura 2.26: $\overline{AB} < \overline{CB} < \overline{CD}$

Equivalente a : $sen\,x < x < tg\,x$

Al dividir por $sen\,x$:
$$\frac{sen\,x}{sen\,x} < \frac{x}{sen\,x} < \frac{tg\,x}{sen\,x}$$
$$1 < \frac{x}{sen\,x} < \frac{1}{cos\,x}$$

Al invertir el sentido de la desigualdad:
$$1 > \frac{sen\,x}{x} > \cos x$$

Al tomar Límite para $x \to 0$:
$$\lim_{x\to 0} 1 \geq \lim_{x\to 0} \frac{sen\,x}{x} \geq \lim_{x\to 0} \cos x$$
$$1 \geq \lim_{x\to 0} \frac{sen\,x}{x} \geq 1$$

Por el teorema de la Compresión se puede afirmar:
$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\,x}{x} = 1$$

2.11-Continuidad de las funciones

2.11.1-Generalidades y definición

Sea una función $y = f(x)$ definida para cierto entorno no reducido de un punto x_0 .En dicho punto su valor es $y_0 = f(x_0)$. Si se da a x un incremento Δx , positivo o negativo, la variable adquiere el valor $x = x_0 + \Delta x$, y la función "**y**" también quedará incrementada en Δy. El nuevo valor incrementado de la función será $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$, ver Figura 2.27.

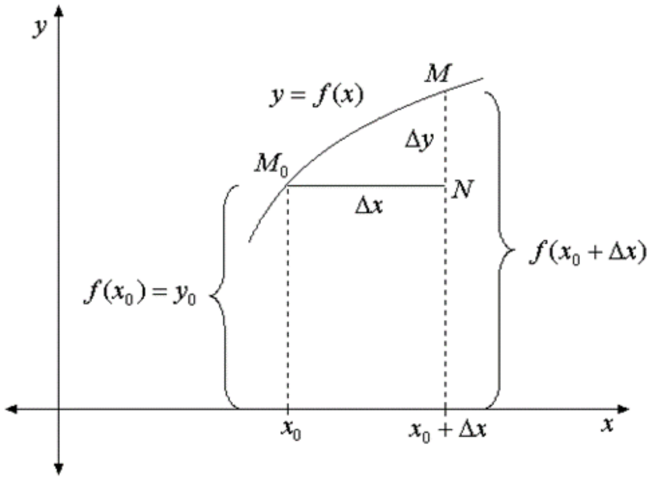


Figura 2.27

El incremento de la función se expresa por la fórmula: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Con anterioridad al desarrollo del cálculo diferencial e integral, se decía que una función era continua si no crecía de a saltos. Con ello se quería expresar que Δy se podía hacer tan pequeño como se quisiera, con sólo tomar Δx lo suficientemente chico, o bien un pequeño cambio en x produce solo un pequeño cambio en y. Para introducir el tema, se toma este concepto primitivo presentado por Augustin L. Cauchy (1789 - 1857) en su libro Cours d'Analyse de 1821, que formalmente se expresa diciendo que es continua si $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$

Geométricamente: La continuidad de una función en un punto x_0 significa que la diferencia de ordenadas de la gráfica $y = f(x)$, en los puntos $x_0 + \Delta x$ y x_0 , será en valor absoluto tan pequeña como se quiera, a condición de que Δx sea suficientemente chico.

Definición:

La función $y = f(x)$ es continua para el valor $x = x_0$ (o en el punto x_0) si está definida en cierto entorno no reducido del mismo y si :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \qquad \textit{(1)}$$

O bien, lo que es lo mismo, :

$$\lim_{\Delta x \to 0} [\, f(\, x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0 \qquad \textit{(2)}$$

Como $\Delta x \to 0$ equivale a $x \to x_0$ y además $x = x_0 + \Delta x$, la condición **(2)** también se puede escribir así:

$$\lim_{x \to x_0} [\, f(\, x) - f(x_0)] = 0$$

y puesto que $$\lim_{x \to x_0} f(x_0) = f(x_0)$$

resulta: $$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad \textbf{(3)}$$

Esta última requiere que se cumplan tres condiciones siguientes:

(4)

a) La función está definida en x_0 ,es decir, existe *f(x0).*

b) Existe límite *L* de $f(x)$ en x_0 .

c) Ambos valores son iguales, esto es *L=f(x0).*

Se puede determinar la continuidad en un punto, verificando si la función está definida en un entorno del punto que lo incluya, y si se cumple $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ o bien comprobando si se cumplen las condiciones **(4),** que son las más usadas para realizar esta comprobación.

Ejemplo 1: Demostraremos que la función $y = x^2$ es continua en el punto x_0 , arbitrariamente elegido, Figura 2.28 o Figura 2.29.

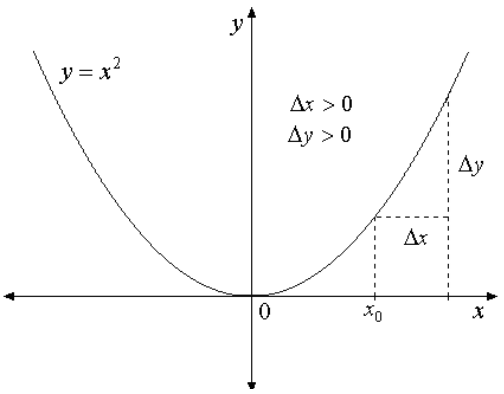


Figura 2.28

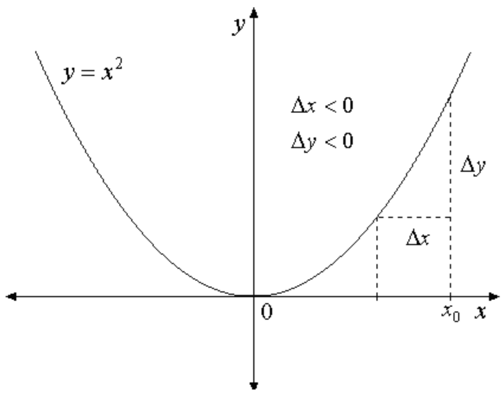


Figura 2.29

En efecto: $y_0 = x_0^2$; $y_0 + \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2$

$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2\ x_0\ \Delta x + \Delta x^2$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2\ x_0\ \Delta x + \Delta x^2) = 2\ x_0 . \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x\ .\ \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0$, por lo tanto es continua en x_0 arbitrario (luego es continua $\forall x \in R$). Independientemente del modo en que: $\Delta x \to 0$

2.11.2- Teoremas y propiedades de las funciones continúas en un punto

Mediante razonamientos análogos al anterior, se demuestra el siguiente teorema:

Teorema 1:

Siendo las funciones $f_1(x)$ *y* $f_2(x)$ *continuas en el punto* x_0, *su suma:*

$$\Psi(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

también será continua en dicho punto.

Demostración: Siendo continuas $f_1(x)$ *y* $f_2(x)$ en x_0, de acuerdo con **(3)** se puede escribir:

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = f_1(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} f_2(x) = f_2(x_0)$$

Como: $$\Psi(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

tomando límite se tiene:

$$\lim_{x \to x_0} \Psi(x) = \lim_{x \to x_0} (f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) + \lim_{x \to x_0} f_2(x) = f_1(x_0) + f_2(x_0) = \Psi(x_0)$$

Generalizando: la suma de un número finito de funciones continúas en un punto $x = x_0$, es una función continua en $x = x_0$.

Sobre la base de los Teoremas Fundamentales Sobre Límites, vistos en el punto ***2.9****, se* ***enuncian las siguientes propiedades****:*

a) *El producto de dos funciones continuas en* x_0 *es una función continua en dicho punto.*

b) *El cociente de dos funciones continuas en* x_0 *es una función continua en* x_0, *siempre que el denominador no se reduzca a cero en dicho punto.*

c) *Si* $\mu = h(x)$ *es una función continua en* $x = x_0$ *y a su vez* $f(\mu)$ *es una función continua en el punto* $\mu_0 = h(x_0)$, *la función compuesta* $f[h(x)]$ *será continua en el punto* x_0 *a través de* f *y de* h.

Observación: Las propiedades vistas se refieren a un punto. Estos enunciados pueden extenderse a un intervalo. Por ejemplo: La suma de un número finito de funciones continuas es una función continua en la intersección de los intervalos de continuidad. Así con los demás teoremas. Posteriormente se dará precisión a los conceptos de continuidad en intervalo abierto e intervalo cerrado

Ejemplo 2: En el ejemplo 1 quedó probado que $\mu = x^2$ es una función continua para todo *x*. Como *y* = $sen\,\mu$ también es una función continua de μ, para todo μ real, entonces $y = sen\,x^2$ es función continua de *x*.

Teorema 2:

Toda función elemental es continua en todo punto en el cual la función está definida.

Observación: Teniendo en cuenta que $x_0 = \lim\limits_{x \to x_0} x$, la igualdad **(3)** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$; puede escribirse así: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x) = f(x_0)$.

Es decir que para hallar el límite de una función continua cuando $x \to x_0$, basta sustituir la variable independiente *x* por el valor al cual tiende, en la expresión $y = f(x)$ de la función. Cuestión ésta, que de todas formas se colegía directamente de la **(3)** sin más discusión.

Ejemplo 3: La función y = x^2 es continua en cualquier punto x_0, por lo tanto:

$$\lim_{x \to x_0} x^2 = x_0^2 ; \qquad \lim_{x \to 2} x^2 = 2^2 = 4$$

Ejemplo 4: La función *y* = sen *x* es continua en cualquier punto, por ejemplo en $x_0 = \pi/4$ entonces:

$$\lim_{x \to \pi/4} sen\ x = sen\ (\pi/4) = \sqrt{2}/2$$

Ejemplo 5: La función *y* = e^x es continua para todo *x* por lo tanto: $\lim\limits_{x \to a} e^x = e^a$

Definición: función contínua en un intervalo (a,b)

Se dice que la función y = f(x) es continua en el intervalo dado (a;b), donde a<b, si es continua en cada uno de los puntos del mismo.

Si además la función está definida en el punto x=a, siendo $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, se dice que en el punto x=a, la función f(x) es continua a la derecha.

Si $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ se dice que en el punto *x=b*, la función *f (x)* es continua a la izquierda.

Definición: función contínua en un intervalo [a,b]

Si la función es continua en cada punto del intervalo abierto (a;b) y al mismo tiempo es continua por la derecha en a y por la izquierda en b, $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ *, se dice que la función* $f(x)$ *es continua en el intervalo cerrado [a;b].*

Ejemplo 6: La función $y = x^2$ es continua en cualquier intervalo cerrado *[a;b]*como se deduce del ejemplo 1.

Están dadas las condiciones para analizar teoremas y propiedades de funciones continuas en un intervalo.

2.11.3 - Teoremas y propiedades de las funciones continuas en un intervalo

Se expondrán algunas propiedades de las funciones continuas en un intervalo cerrado. Estas propiedades se presentan como teoremas, sin demostrarlos.

Teorema 1:

Si la función $y = f(x)$ es continua en el intervalo [a;b] ($a \leq x \leq b$), existe en el mismo al menos un punto $x = x_1$, tal que el valor de la función en dicho punto satisface la desigualdad $f(x_1) \geq f(x)$ $\forall x \in [a;b]$ y existe por lo menos un punto $x = x_2$ tal que el valor de la función en el mismo, satisface la desigualdad $f(x_2) \leq f(x)$ $\forall x \in [a;b]$

Se denomina a $f(x_1)$ valor máximo absoluto de la función $y = f(x)$ en el intervalo $[a;b]$ y a $f(x_2)$ valor mínimo absoluto en el mismo intervalo.

Este teorema se anuncia brevemente así: **Toda función continua en el intervalo $a \leq x \leq b$ alcanza al menos una vez en él su valor máximo absoluto *"M"* y su valor mínimo absoluto "m". (Teorema de Bolzano-Weierstrass).**

La interpretación gráfica de este teorema se puede ver en la Figura 2.30

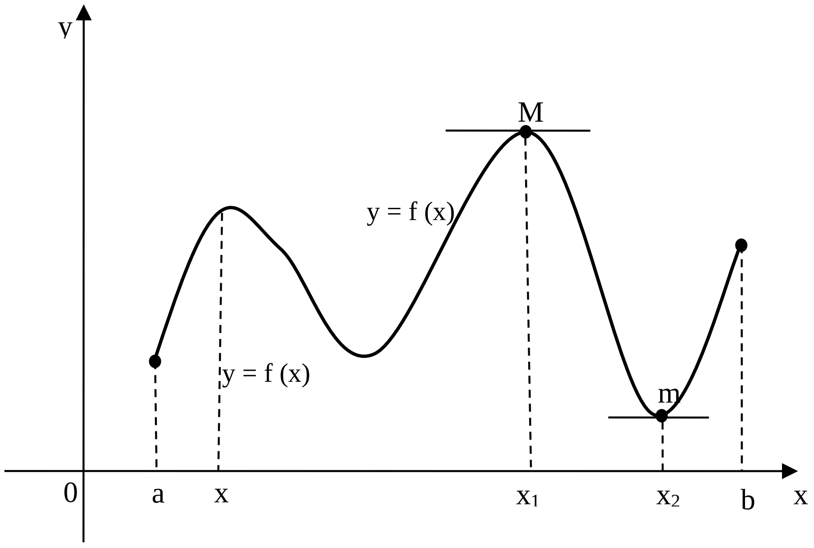


Figura 2.30

Observación: el teorema enunciado puede no ser cierto si la función se define en un intervalo abierto. Por ejemplo: $y = x$ en un intervalo abierto $0 < x < 1$; no tiene entre sus valores un máximo ni un mínimo. En realidad esto es así, pues no existe el punto extremo izquierdo, porque cualquiera que sea el punto x elegido, siempre se puede tomar otro punto, por ejemplo $\frac{x}{2}$, más a la izquierda que el optado. Por la misma razón no existe el punto extremo derecho, y por lo tanto no puede haber valor máximo *"M"*, ni mínimo *"m"*; en la función $y = x$.

Teorema 2:

Si la función $y = f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a;b]$ y sus valores en los extremos son de signos contrarios, entre los puntos a y b existirá por lo menos un punto $x = c$, en el que la función se anule.

Este Teorema tiene una sencilla interpretación gráfica: la gráfica de la función continua $y = f(x)$ que une los puntos M_1 y M_2, donde $f(a) < 0$; y $f(b) > 0$ (o bien, $f(a)>0$ y $f(b)<0$), corta al eje x por lo menos en un punto, Figura 2.31.

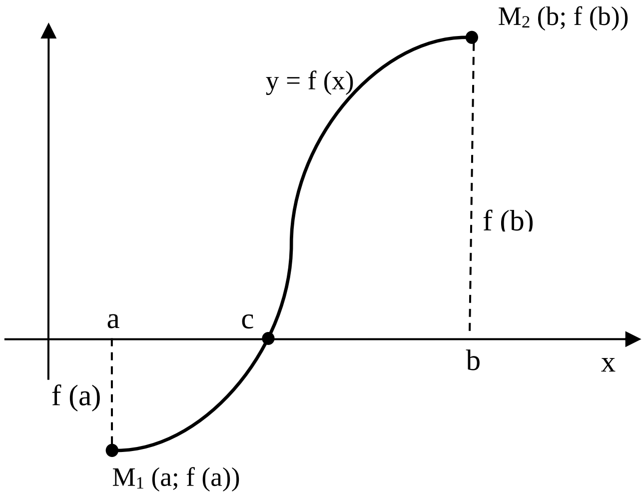


Figura 2.31

Teorema 3:*(Generalización del anterior)*

Sea y = f(x) una función definida y continua en el intervalo cerrado [a;b]. Si en los extremos del mismo toma valores diferentes f (a) = A; f(b) = B, entonces cualquiera que sea el número μ, comprendido entre los valores A y B, siempre existe un punto x = c, comprendido entre a y b, tal que f (c) = μ.

Este teorema se ilustra en la Figura 2.32. En el caso dado cualquier recta $y = \mu$, cortará la gráfica de la función *y = f(x):*

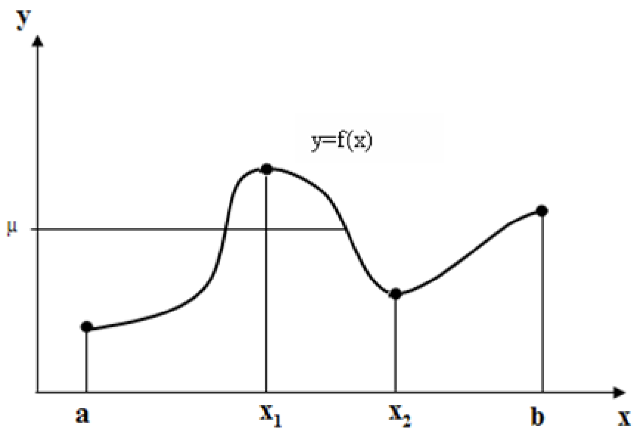


Figura 2.32

Observación: El Teorema 2 no es más que un caso particular del Teorema 3; porque si *A y B* son de signos contrarios se puede tomar $\mu = 0$, puesto que 0 está comprendido entre *A y B.*

Corolario del teorema 3: Si la función *y = f(x)* es continua en un intervalo y si alcanza en él sus valores máximo (*M*) y mínimo (*m)* $\Rightarrow$ en el intervalo dado, la función toma una vez por lo menos cualquier valor μ intermedio comprendido entre el máximo y el mínimo, Figura 2.33.

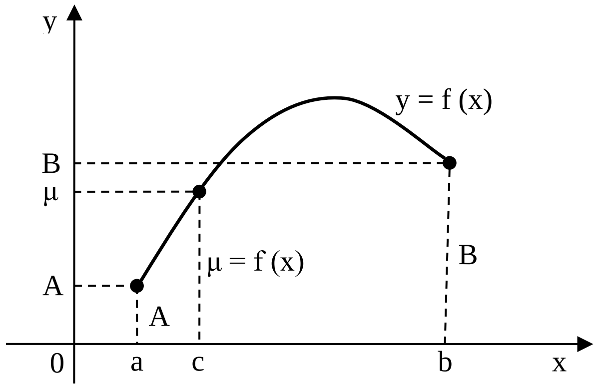


Figura 2.33.

2.12-Discontinuidad

2.12.1-Definición y ejemplos

Definición:

Una función y=f(x) es discontinua en un punto x_0 *de su dominio, si para el mismo no se cumple una o más de las condiciones de continuidad* ***(4)*** *establecidas en 2.11.1. Es decir si para* $x = x_0$ *la función no está definida, o no existe* $\lim_{x\to x_0} f(x)$*; o bien, existiendo ambos resulta* $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$*, entonces se dice que la función y=f (x) es discontinua en el punto* $x = x_0$ *y éste, se denomina punto de discontinuidad de la función.*

Ejemplo 1: La función $y = \frac{1}{x}$ es discontinua en x=0, puesto que $f(0)$ no existe. Además:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \,.$$

Luego, no existe L en $x = 0$.

No obstante lo dicho, es simple probar que la función $y = \frac{1}{x}$ es continua para todo valor de $x \neq 0$.

Ejemplo 2: La función $y = 2^{1/x}$, (Figura 2.34), es discontinua en $x = 0$, puesto que el exponente $\frac{1}{x}$ no existe para $x = 0$. Luego, $y = 2^{1/x}$ no existe para tal valor de x. Con ello basta para afirmar que $x = 0$ es un punto de discontinuidad, pero además, profundizando en el tema, se puede concluir que tampoco existe el $\lim_{x\to 0} 2^{1/x} = L$, en efecto:

$$\lim_{x\to 0^+} 2^{1/x} = \infty \,; \quad \lim_{x\to 0^-} 2^{1/x} = 0$$

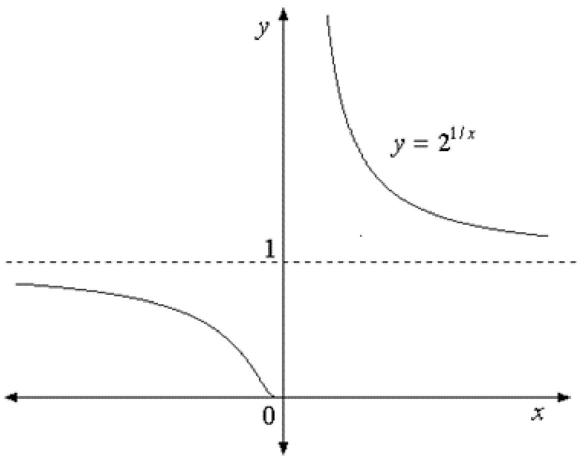


Figura 2.34

Ejemplo 3: Analizar la función: $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

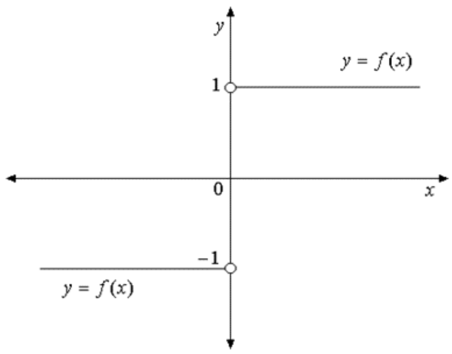


Figura 2.35

$$\text{Si } x<0 \quad \frac{x}{|x|} = -1 \quad \text{y si} \quad x>0 \quad \frac{x}{|x|} = 1,$$

por consiguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{|x|} = -1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{|x|} = +1 \end{array}\right\} L_1 = -1; \quad L_2 = +1.$$

Por tanto L no existe. Además en x= 0 la función no está definida.

De esta manera se ha establecido que la función $\dfrac{x}{|x|}$ es discontinua en x =0. Por supuesto, no es necesario determinar ambas cosas. Con sólo comprobar que L ó $f(x_0)$ no existe, es suficiente. Es inmediato establecer que $f(x_0)$ no existe para x_0= 0, dado que x aparece en el denominador. Esta opción es más simple que determinar si el límite existe o no. Ello puede ser tenido en cuenta para casos más complejos.

2.12.2– Clasificación de discontinuidades

Las discontinuidades pueden ser clasificadas en evitables y no evitables.

Discontinuidad evitable es cuando existe el límite $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$, en este tipo de discontinuidad *$f(x_0)$ puede o no existir y, en caso de existir, $L \neq f(x_0)$*

(ver Figuras 2.36 y 2.37)

Esta discontinuidad se evita (de allí el nombre), dando a la función en x_0 el valor del límite en dicho punto. Es decir forzando el valor $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

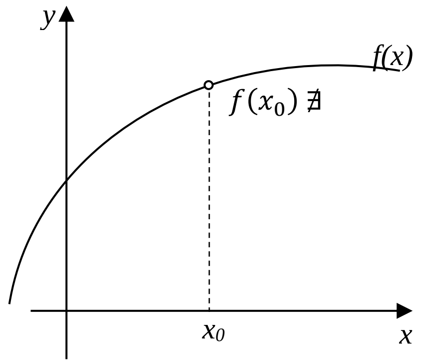


Figura 2.36

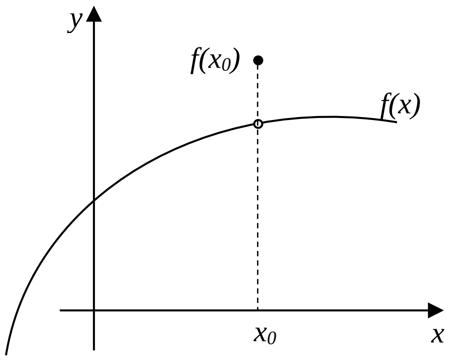


Figura 2.37

Discontinuidad no evitable

En las discontinuidades no evitables, en un valor x_0, no existe el límite en dicho punto. La no existencia de ese límite puede darse de las distintas formas ya vistas. Puede ser que los límites laterales existan y sean distintos, o bien que no exista al menos uno de ellos ó que no existan ambos.

Discontinuidad no evitable $\begin{cases} \text{Existen } L_1 = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \quad \text{y } L_2 = \lim_{x \to x_0^+} f(x). \text{ Siendo } L_1 \neq L_2 \\ \text{ó} \\ \text{No existe } L_1 \text{ ó } L_2 \text{ ó ambos} \end{cases}$

En la figura 2.38 (corresponde al ejemplo 2 del apartado 2.3) se muestra gráficamente una caso de discontinuidad no evitable en el punto $x_0=0$, en ese punto los límites laterales no existen. gráfica se obtuvo utilizando el software Geogebra y corresponde a la función $y = sen\frac{1}{x}$.

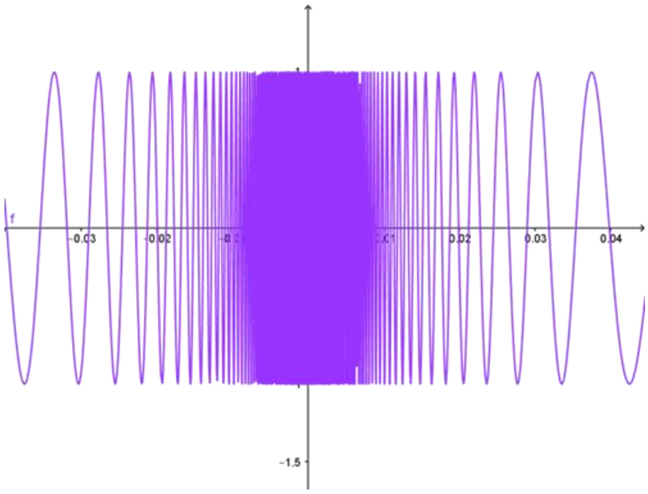


Figura 2.38

Ejemplo 1: Sea la función $y = sen\,\frac{1}{x}$, cuyos límites laterales para $\boldsymbol{x_0=0}$, fueron determinados en el ejemplo 2 del apartado **2.3, c**on la finalidad de determinar la existencia o no del límite. Resultó que en $\boldsymbol{x_0=0}$ no existen ni L_1 ni L_2, luego la función presenta en dicho punto una **discontinuidad no evitable**

Ejemplo 2: En la Figura 2.39 se muestra la gráfica de la función $y = \frac{|x+1|}{x+1}$, con límites laterales $L_1 = -1$ y $L_2 = 1$ en el punto $x_0 = -1$. Luego,en ese punto la función presenta una discontinuidad no evitable.

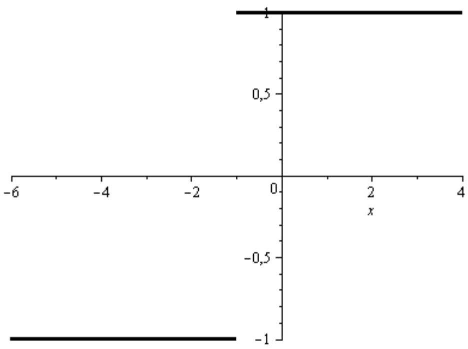


Figura 2.39

Ejemplo 3: Sea la función y = x sen$\frac{1}{x}$, (Figura 2.40). Analizar su discontinuidad en $x = 0$

Esta función es discontinua en $x = 0$ ya que en dicho punto ni siquiera está definida. Pero si se redefine asignándole el valor 0 en el punto x=0 resulta:

$$fc(x) = \begin{cases} x\,sen\dfrac{1}{x} & si\;\; x \neq 0 \\ 0 & si\;\; x = 0 \end{cases}$$

Así redefinida es continua para todo valor de x. De esta manera **<u>se ha evitado</u>** la discontinuidad.

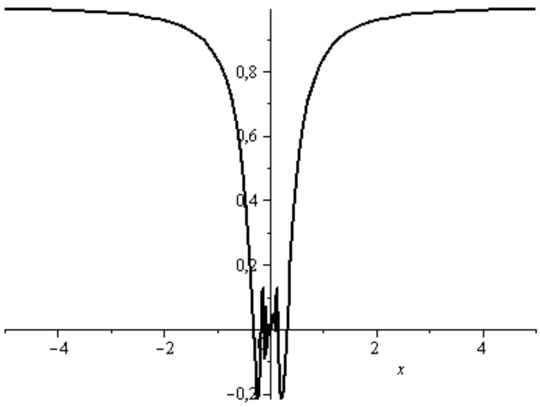


Figura 2.40

Este procedimiento no es posible en casos como los ya vistos $y = sen\frac{1}{x}$; $y = sen\frac{\pi}{x}$ e $y = \frac{|x+1|}{x+1}$ puesto que no hay modo de asignarle un valor en el punto x=0 para las dos primeras funciones y en x=-1 para la última expresión, de forma tal que se convierta en función continua. Por esta razón se dice que en esos puntos la función presenta una discontinuidad no evitable.

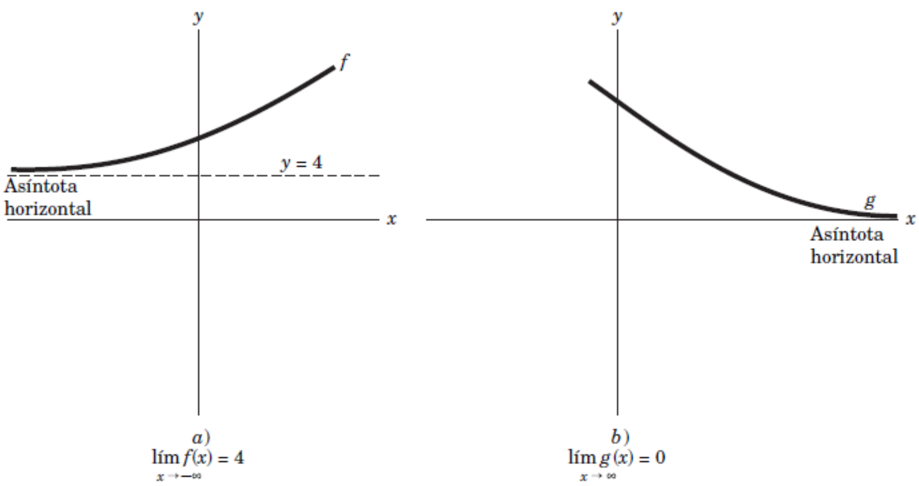
Nota: Existen clasificaciones de discontinuidades mas detalladas que pueden consultarse en la bibliografía de referencia.

2.13 –Asíntotas

2.13.1–Definición

A menudo se desea conocer el comportamiento de una función conforme aumenta la variable independiente "aproximándose" al infinito, tanto positivo como negativo. Examíne las dos funciones trazadas en la figura 2.41, en a, al acercarse x al infinito negativo, f(x) se aproxima al valor de 4 pero sin alcanzarlo nunca. Usando la notación de límites, se establece que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 4$$



También puede afirmarse que f(x) tiene una **asíntota horizontal** que es y = 4 conforme x se acerca a -∞. También, esto significa que f(x) se aproxima a un valor de 4, aunque sin alcanzarlo nunca, a medida que x se acerca a -∞.

De igual manera, en la figura b, g(x) se acerca al eje x aunque sin tocarlo nunca, conforme x se aproxima a ∞. Este comportamiento puede formularse mediante la notación $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$

Como en el caso de f(x), g(x) tiene una asíntota horizontal de ecuación y=0, al aproximarse x a ∞.

Básicamente, una asíntota es una línea a la que la gráfica de la función se acerca cada vez más. Para encontrar sus expresiones se necesita usar el concepto de límites infinitos.

Definición:

Una recta es asíntota a una curva, si la distancia δ de la misma a un punto P de la curva tiende a cero, cuando P se desplaza por la curva alejándose indefinidamente.

Una asíntota no es parte de la gráfica de la función, es la gráfica de otra función (una función lineal), pero es de ayuda para trazar la gráfica de la función en estudio. Las asíntotas pueden ser horizontales, verticales u oblícuas.

2.13.2−Asíntotas Verticales

Con $P \to \infty$ se expresa simbólicamente que el punto P recorre la curva alejándose indefinidamente, en el caso de la Figura 2.41 en el sentido ascendente, cuando $x \to a^+$.

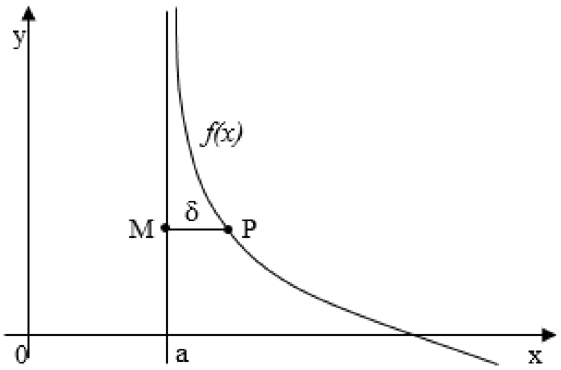


Figura 2.42

Por definición de asíntota, si la distancia $\delta \to 0$ para $P \to \infty$ debe verificarse que:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

Es decir, que para encontrar la ecuación de una asíntota vertical de una función, bastará conocer aquellos valores *a* de *x* para los que $\lim_{x\to a} f(x) \to \infty$, luego la ecuación de la misma será *x=a*. Una para cada valor a de *x* que verifique la condición anterior.

Ello inclusive cuando tienda a ∞ sin signo (uno de los límites laterales + ∞ y el otro a - ∞)

Ejemplo: Analizar la función definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Es claro que la función tiende a ∞ cuando x→0, es decir, la curva que representa a la función tiene una asíntota vertical de ecuación $x = 0$, (que es la ecuación del eje y), puesto que verifica que $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$ sin signo (ya que es + ∞ cuando tiende a 0 por derecha y - ∞ por izquierda).

En la Figura 2.42 se representa un tramo de la asíntota, de trazo grueso coincidiendo con el eje *y*.

Con Geogebra el comando es: Asintota[f(x)].

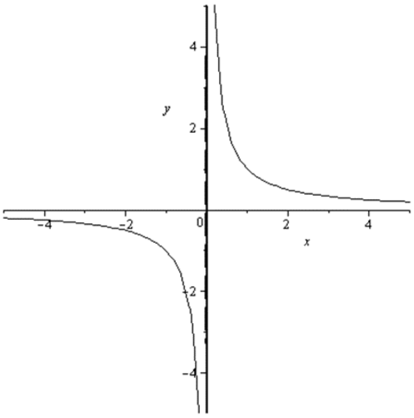


Figura 2.43

Regla de las asíntotas para funciones racionales:

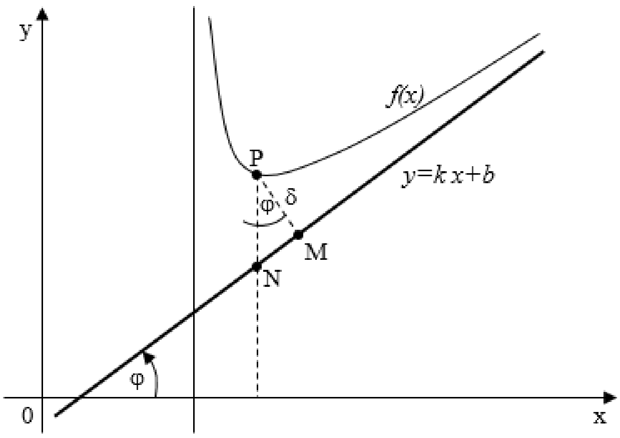
Suponga que $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde P(x) y Q(x) son funciones polinómicas. La recta x=a es una asíntota vertical para la gráfica de f(x) si y solo si Q(a) = 0 y P(a) ≠ 0 .

2.13.3−Asíntotas oblicuas y horizontales

Se supone que la curva definida por *f (x)* presenta una asíntota oblicua, la cual podrá o no pasar por el origen de coordenadas y por lo tanto su ecuación general será:

$$\boxed{y = k\ x + b} \quad \textbf{(*)}$$

Si $k \neq 0$ es asíntota oblicua; $si\ k = 0$ es asíntota horizontal.



Donde *k* representa la pendiente de la recta,

$k = tg\varphi$, y *b* es la ordenada al origen.

Figura 2.44

Para obtener el valor de k se plantea el siguiente límite:

$$\boxed{\Rightarrow k = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{f(x)}{x} \right]}$$

Obtenido *k*, se reemplaza en la expresión para obtener b:

$$\boxed{b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - kx \right]}$$

Por lo tanto, si existen los límites que nos dan los valores de *k* y *b*, se reemplazan en la **(*)**, con lo que se obtiene la ecuación de la recta asíntota a la curva *f (x).*

El caso en que k = 0, se plantea el límite:

$$b = \lim_{x\to\infty} f(x)$$

Siendo la recta **y = b una asíntota horizontal** de la f(x)

Ejemplo: Determinar las asíntotas de la curva: $f(x) = \dfrac{x^2 + 2.x - 1}{x} = x + 2 - \dfrac{1}{x}$

Nota: La simplificación realizada en la función propuesta es válida a los fines de la determinación de las asíntotas, puesto que ambos miembros presentan el mismo punto de discontinuidad. Ello no siempre es correcto efectuarlo, puesto que puede conducir a dos funciones muy diferentes, en ciertos aspectos, en ambos miembros.

Se analiza si *f (x)* tiene asíntotas verticales:

Cuando $x \to 0^-$ la función $f(x) \to +\infty$

Cuando $x \to 0^+$ la función $f(x) \to -\infty$

Luego se concluye que la recta de ecuación*x* = 0 es asíntota vertical de la curva *f (x).*

Se indaga sobre la existencia de asíntotas oblicuas u horizontales:

Para ello se determina *k*:

$$k = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right] = 1 \Rightarrow \text{que no posee asíntota horizontal}$$

Determinado *k* se procede a calcular *b*: $b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - kx \right] = \lim_{x\to\infty}\left[x + 2 - \dfrac{1}{x} - x \right] = 2$

Se concluye que la recta de ecuación $y = x + 2$ es asíntota oblicua de la curva de *f(x).*

Para determinar si la curva queda por arriba o por debajo de su asíntota, estudiamos el signo de la diferencia: $f(x) - y = \left[x + 2 - \dfrac{1}{x} \right] - \left[x + 2 \right] = -\dfrac{1}{x}$; la cual es: > 0, si *x*< 0 y < 0, si *x* > 0.

En definitiva, la función dada tiene por representación gráfica una curva que presenta las siguientes asíntotas:

1) Asíntota vertical de ecuación x=0.

2) Asíntota oblicua de ecuación y=x+2

En la gráfica se ha resaltado, más gruesa, la asíntota que coincide con el eje y.

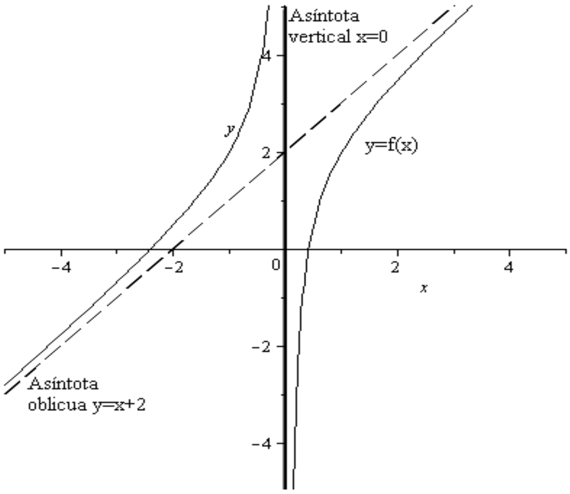


Figura 2.44

Observaciónes:

- Una gráfica puede tener numerosas asíntotas verticales, pero puede tener cuando mucho dos asíntotas horizontales diferentes.
- Para el caso de las funciones racionales siempre que el grado del numerador sea mayor que el del denominador, la gráfica de la función no puede tener una asíntota horizontal.
- Una función polinómica no tiene asíntotas.

Bibliografía de referencia

- ***CÁLCULO 1 DE UNA VARIABLE*** (novena edición)- Ron Larson & Bruce H. Edwards. McGraw Hill, 2010.
- ***CÁLCULO. Trascendentes tempranas*** (cuarta edición)- Dennis G. Zill &Warren S. Wright. McGraw Hill, 2011.
- ***CÁLCULO DE UNA VARIABLE. Trascendentes tempranas*** (sexta edición)- James Stweart. Cengage Learning, 2008.

Apendice

Demostración de las expresiones de Asíntotas oblicuas y horizontales

Se supone que la curva definida por *f (x)* presenta una asíntota oblicua, la cual podrá o no pasar por el origen de coordenadas y por lo tanto su ecuación general será:

$$\boxed{y = k\ x + b} \quad \textbf{(*)}$$

Si $k \neq 0$ es asíntota oblicua; $si\ k = 0$ es asíntota horizontal.

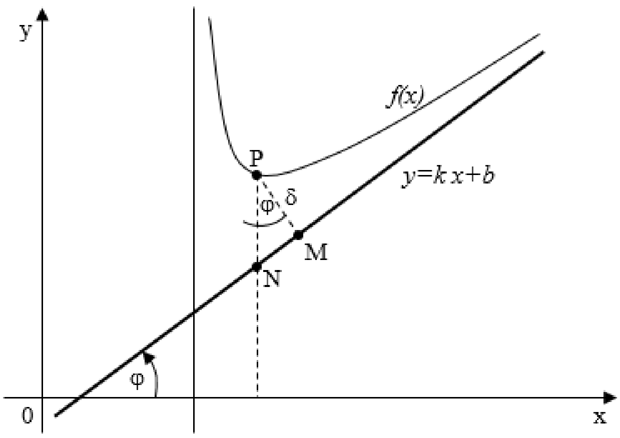


Figura 2.43

Donde k representa la pendiente de la recta, $k = tg\varphi$, y b es la ordenada al origen.

De la figura se deduce que:

$$\cos\varphi = \frac{PM}{PN} \quad ; \quad PN = \frac{PM}{\cos\varphi} = \frac{\delta}{\cos\varphi}$$

Como φ es un valor constante, $\cos\varphi$ también lo es, luego:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\delta}{cos\,\phi} = 0$$

Por definición de asíntota, dado que δ→0 y $\cos\varphi$ es constante, como se dijo.

Esto significa que:

$$\lim_{x\to\infty} PN = \lim_{x\to\infty} \frac{\delta}{cos\,\phi} = 0 \text{ ; pero PN} = \left| f(x) - y \right| = \left| f(x) - k\,x - b \right|$$

Luego:

$$\lim_{x\to\infty} PN = \lim_{x\to\infty} [f(x) - k\,x - b] = 0 \qquad (**)$$

Como el segundo miembro de la ecuación anterior tiende a cero, si se lo divide por *x* que tiende a infinito, el cociente también tiende a cero:

Entonces dividiendo por *x* resulta:

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0$$

Otro modo de entenderlo es que como el denominador *x* tiende a infinito y el numerador tiende a cero, obviamente el cociente tiende a cero.

Teniendo presente que k es una constante, distribuyendo el límite y despejando k de la ecuación anterior

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0\ \boxed{\Rightarrow k=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]}$$

Obtenido *k*, se reemplaza en la expresión **(**)** y se despeja *b* que es una constante:

$$\boxed{b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]}$$

Por lo tanto, si existen los límites que nos dan los valores de *k* y *b*, se reemplazan en la **(*)**, con lo que se obtiene la ecuación de la recta asíntota a la curva *f (x).* Caso contrario la curva no tiene asíntotas oblicuas ni horizontales..