MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACIÓN
Universidad Nacional de San Juan

FACULTAD DE INGENIERÍA

Departamento de Matemática

Cátedra: CÁLCULO I – ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Autoría: Equipo de Cátedra - 2023

GUÍA DE EJERCICIOS TEMA 2

LÍMITE FUNCIONAL Y CONTINUIDAD

Introducción

Entender cómo se comportan las funciones cuando se aproximan a ciertos valores es muy importante para muchas aplicaciones reales. En este documento se trabajarán ejercicios referidos a los conceptos de límite de una función, continuidad de funciones y asíntotas de las mismas.

Conceptos preliminares: Intervalo, entorno y conjunto de números reales

Resolver las siguientes desigualdades, expresando los resultados como intervalo, conjunto y entorno. Representar en la recta numérica. Recuerde que solo los intervalos con extremos finitos y abiertos pueden expresarse como entorno.

a) $|2x+5| \leq 9$

> Se puede resolver simultáneamente la doble desigualdad ya que el valor absoluto tiene el símbolo de menor o menor igual. De lo contrario, debe resolverse en forma separada como

$$|2x+5| \leq 9$$

$$-9 \leq 2x+5 \leq 9$$

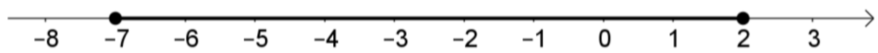
$$-9-5 \leq 2x \leq 9-5$$

$$\frac{-14}{2} \leq x \leq \frac{4}{2} \rightarrow -7 \leq x \leq 2$$

Intervalo: $A = [-7,\ 2]$

Conjunto: $A = \{x \ / \ x \in R;\ -7 \leq x \leq 2\}$

Entorno: Al tratarse de un intervalo cerrado no puede expresarse como entorno. Sólo los intervalos abiertos pueden expresarse como entornos.



b) $|4-x|>3$

$$|4-x|>3$$

$$-3>4-x \qquad\qquad 4-x>3$$
$$-3-4>-x \qquad\qquad -x>3-4$$

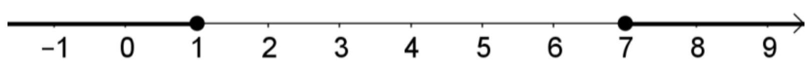
Al dividir ambos términos por el factor (-1), se invierte el orden de la desigualdad:

$$\frac{-7}{-1}<x \qquad\qquad x<\frac{-1}{-1}$$
$$7<x \qquad\qquad x<1$$

Intervalo: $B=(-\infty,\ 1)\cup(7,\infty)$

Conjunto:$B=\{x\ /\ x\in R;\ x<1\text{ ó }x>7\}$

Entorno: Al tratarse de un intervalo con radio infinito no puede expresarse como entorno. Sólo los intervalos con extremos finitos y abiertos pueden expresarse así.



Véase que cualquier valor de x puede encontrarse en un intervalo o en el otro, pero no en ambos simultáneamente.

c) $|3+3x|<6$

$$|3+3x|<6$$
$$-6<3+3x<6$$
$$-6-3<3x<6-3$$
$$\frac{-9}{3}<x<\frac{3}{3}\rightarrow -3<x<1$$

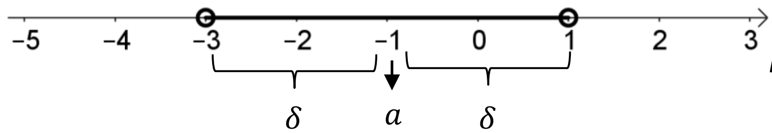
Intervalo: $\boxed{C=(-3,\ 1)}$

Conjunto: $\boxed{C=\{x\ /\ x\in R;\ -3<x<1\}}$

Entorno: Se determina el radio (δ) *del intervalo y el centro* (a) *a partir de él.*

$$\left.\begin{array}{r}\delta=\dfrac{x_2-x_1}{2}=\dfrac{1-(-3)}{2}=2\\ a=x_1+\delta=x_2-\delta=-3+2=1-2=-1\end{array}\right\}\boxed{E_2(-1)=E_\delta(a)}$$

Guía de Ejercicios Tema 2



Entorno no reducido

Ejercicios:

d) $|x - 1| \geq 9$

e) $\left|2 - \frac{3}{2}x\right| \leq 5$

f) $|1 - x| < \frac{5}{2}$

g) $0 < |3x - 1| < 3$

h) $0 < |-x + 2| < 2$

1.2. Dados los siguientes entornos, expresarlos como intervalo, desigualdad y conjunto. Representar en recta numérica.

a) $E_1(-2)$

b) $E_2'(5)$

Límites de funciones

El concepto de límite tiene que ver con la idea de acercarse lo más posible a un valor determinado, el cual puede o no ser finito.

El límite de una función se puede entender como el obtener a qué valor se va aproximando una función $f(x)$ cuando x tiende a un valor x_0 o $\pm\infty$.

El valor al que se aproxima la función se lo denomina con la letra L, y puede o no ser finito.

Para determinar el límite de una función se debe tener en cuenta:

- En el caso de expresiones de la forma $\frac{a}{0}$ (a: nº real ≠ 0) se calculan los límites laterales de la función en el punto.
- Cuando al sustituir x se llegue a una expresión indeterminada se tendrá que quitar previamente dicha indeterminación.

Algunas expresiones, cuyos valores no conocemos a priori, son llamadas indeterminaciones. Existen ciertas reglas que nos permiten calcular su valor, debiendo realizar una serie de operaciones o cálculos. Las indeterminaciones pueden ser del tipo $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 * \infty$, 1^{∞}, 0^0, ∞^0. En esta unidad trabajaremos con las tres primeras.

En las indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ se debe distinguir el tipo de función:

- ***Límite indeterminado de la forma $\frac{0}{0}$ de funciones racionales.***

  La indeterminación desaparece factorizando ambos polinomios y simplificando.

  Ejemplo:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{x^2-1} \to \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{x^2-1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{-(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{(x+1)} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

- ***Límite indeterminado de la forma $\frac{0}{0}$ de funciones con radicales.***

  Si multiplicamos y dividimos la función por la expresión radical conjugada, se obtendrá un caso como el anterior para proceder de igual manera.

  Ejemplo:

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x+5}-3}{x^2-5x+4} \to \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x+5}-3}{x^2-5x+4} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x+5}-3)}{(x^2-5x+4)} \cdot \frac{(\sqrt{x+5}+3)}{(\sqrt{x+5}+3)} = \lim_{x\to 4} \frac{\left((\sqrt{x+5})^2-3^2\right)}{(x^2-5x+4)} \cdot \frac{1}{(\sqrt{x+5}+3)} =$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{(x+5-9)}{(x^2-5x+4)} \cdot \frac{1}{(\sqrt{x+5}+3)} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)}{(x^2-5x+4)} \cdot \frac{1}{(\sqrt{x+5}+3)} =$$

Guía de Ejercicios Tema 2

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-1)(x-4)}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{x+5}+3\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{(x-1)}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{x+5}+3\right)}=\boxed{\frac{1}{18}}$$

Límite indeterminado de la forma $\frac{\infty}{\infty}$ de funciones racionales

Desaparece dividiendo numerador y denominador por la mayor potencia de la variable. En este caso, el límite sería equivalente al límite de la función que nos quedaría tomando los términos del mayor grado en numerador y denominador.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^3+3x-1}\to\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^3+3x-1}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-x}{x^3}}{\frac{x^3+3x-1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{3x}{x^3}-\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=\boxed{0}$$

EJERCICIO 1: *Calcular los siguientes límites de funciones*

1.1. $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

1.2. $\displaystyle \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-4x+3}$

1.3. $\displaystyle \lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x-4}$

1.4. $\displaystyle \lim_{x\to 9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$

1.5. $\displaystyle \lim_{x\to -2}\frac{4-\sqrt{x+3}}{x+2}$

1.6. $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3}-\sqrt{x+3}}{x}$

1.7. $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+4}-\frac{1}{4}}{x}$

1.8. $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\frac{4x}{4x+\sqrt{16x^2+x}}$

1.9. $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\frac{(4x-2)(x-3)(x+1)}{2x^3+x-1}$

1.10. $\displaystyle \lim_{x\to 2}\frac{2x^2-8x+8}{2x-4}$

1.11. $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}\right)$

1.12. $\displaystyle \lim_{x\to 2}\left(x^2-3x+2-\frac{2-x}{x^2-4}\right)$

1.13. $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3+2x^2-x-2}$

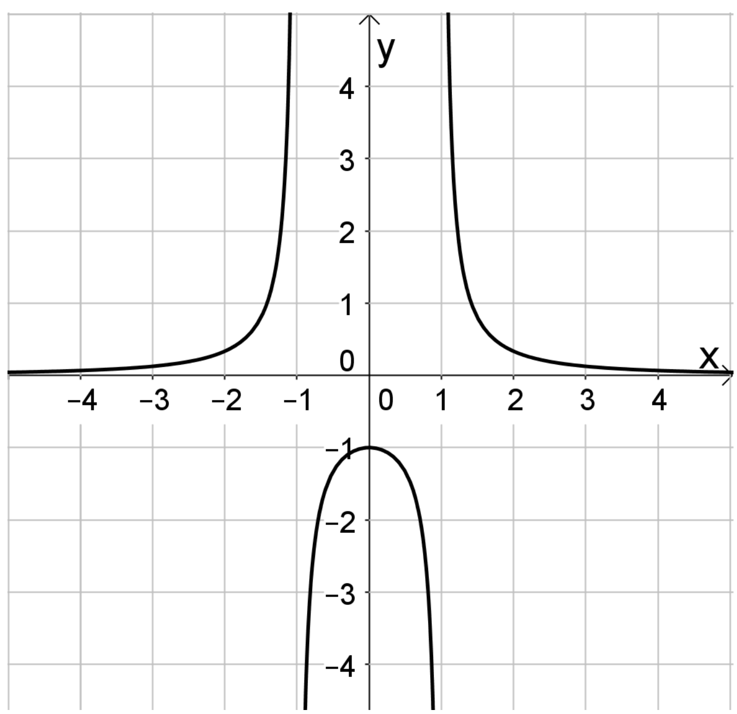
Límites laterales

De manera informal, podemos decir que los límites laterales son aquellos valores a los cuales se aproxima la función f(x) cuando la variable x se acerca o tiende por la derecha o por la izquierda al punto x_0.

Distintas situaciones pueden presentarse con límites laterales en un punto: pueden existir y ser diferentes, ser iguales, no existir por un lado o por los dos lados. Si los límites laterales son diferentes, entonces el límite no existe.

EJERCICIO 2: *Para cada gráfica de función, evaluar los límites laterales que se piden y completar la información sobre la función:*

2.1



$\lim_{x\to-\infty} f(x) =$

$\lim_{x\to-1^-} f(x) =$

$\lim_{x\to-1^+} f(x) =$

$\lim_{x\to-1} f(x) =$

$\lim_{x\to0^-} f(x) =$

$\lim_{x\to0^+} f(x) =$

$\lim_{x\to0} f(x) =$

$\lim_{x\to1^+} f(x) =$

$\lim_{x\to1^-} f(x) =$

$\lim_{x\to1} f(x) =$

$\lim_{x\to\infty} f(x) =$

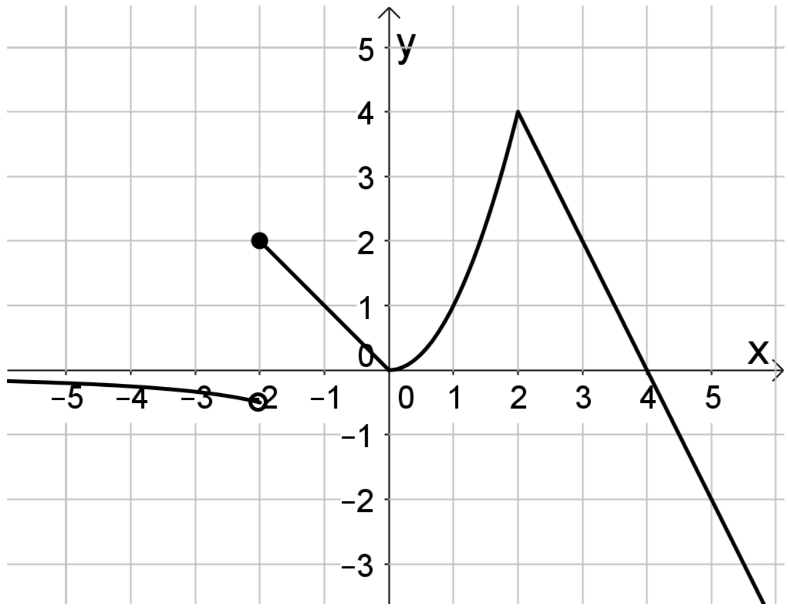
$f(-1) =$

$f(0) =$

Dominio:

Imagen:

2.2



$\lim_{x \to -2^-} f(x) =$ $\qquad$ $\lim_{x \to 2^-} f(x) =$

$\lim_{x \to -2^+} f(x) =$ $\qquad$ $\lim_{x \to 2^+} f(x) =$

$\lim_{x \to -2} f(x) =$ $\qquad$ $\lim_{x \to 2} f(x) =$

$f(-2) =$ $\qquad$ *Dominio:*

$\lim_{x \to \infty} f(x) =$ $\qquad$ *Imagen:*

EJERCICIO 3: *Calcular los siguientes límites, evaluando límites laterales.*

Ejemplo:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = \infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

La gráfica de $y = \frac{1}{x^2}$ *cuando se acerca a* $x = 0$ *abraza al eje de las ordenadas positivas. Por ello la función se aleja al infinito cuando x tiende a 0.*

3.1 $\qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} =$

3.2 $\qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \qquad \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} =$

Infinitésimos Equivalentes

Dos infinitésimos en x_0, denominados α y β son equivalentes si la razón $\frac{\alpha}{\beta}$ tiende a 1 cuando x tiende a x_0, es decir, $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = 1$.

Ejemplos:

$$1)\ \lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x} \cdot \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = 1 \cdot \infty = \boxed{\infty}$$

$$2)\ \lim_{x \to 0} \frac{cos\, x}{2x\, cotg\, x} = \lim_{x \to 0} \frac{cos\, x}{2\, x\, \frac{cos\, x}{senx}} = \lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

EJERCICIO 4: *Sabiendo que las funciones x, $sen\, x$ y $tg\, x$ son infinitésimos equivalentes cuando $x \to 0$, calcular los siguientes límites.*

4.1 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen^2\, x}{x}$

4.2 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x}{sen\, x}$

4.3 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{1 - cos\, x}$

4.4 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen^3\, x}{x^3}$

4.5 $\lim\limits_{t \to 0} \frac{t}{sen\, \frac{t}{2}}$

4.6 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen\, 2x}{3x}$

4.7 $\lim\limits_{x \to 2} \frac{sen\, (x-2)}{x^2 - 4}$

4.8 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - cos^2\, x}{4x^3}$

4.9 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg^3 x}{x\, sen^2 x}$

4.10 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{cos\, x \cdot tg\, x}{x^2}$

4.11 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg\, x}{x^2}$

4.12 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg\, x \cdot sen\, x}{x}$

4.13 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{1 - cos\, 3x}$

4.14 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x + tg\, x}{sen\, x}$

4.15 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg\, 2x}{sen\, 2x - 1}$

Continuidad de funciones

De manera informal, podemos intuir que una función es continua en un intervalo si una gráfica de la misma está constituida por un trazo continuo, es decir un trazo que no tiene "hoyos" ni "saltos".

Al estudiar una función resulta de interés detectar aquellos valores de la variable independiente que representan una discontinuidad en $f(x)$. En estos puntos, se puede determinar la continuidad verificando si se cumplen las siguientes condiciones:

a) La función está definida en x_0, es decir, existe $f(x_0)$.

b) Existe límite L de f(x) en x_0.

c) Ambos valores son iguales, esto es $L = f(x_0)$.

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+x-2}$$

Se encuentran los puntos de discontinuidad, determinando los valores de x para los cuales se anula el denominador.

$$x^2+x-2=0\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=-2 \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} x_1=-2 \\ x_1=1 \end{matrix}} \rightarrow Puntos\ de\ discontinuidad$$

Se procede a analizar cada punto a través del análisis de los límites laterales.

$\boldsymbol{x=-2}$

$$\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x-1}{x^2+x-2} = \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x-1}{(x+2)(x-1)} = \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{1}{x+2} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{x-1}{x^2+x-2} = \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{x-1}{(x+2)(x-1)} = \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{1}{x+2} = \infty \end{matrix}\right\} L^- \neq L^+$$

$$\boldsymbol{f(x)\ es\ discontinua\ no\ evitable\ en\ x=-2}$$

$\boldsymbol{x=1}$

$$\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x-1}{x^2+x-2} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x-1}{(x+2)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{3} \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{x^2+x-2} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{(x+2)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{3} \end{matrix}\right\} L^- = L^+ = \frac{1}{3}$$

$$\boldsymbol{f(x)\ es\ discontinua\ evitable\ en\ x=1}$$

Como presenta discontinuidad evitable, puede redefinirse la función.

5.5 $f(x) = \frac{x^4-x^2}{x^2-x}$

5.6 $f(x) = \frac{x-1}{x^2-x^3}$

Asíntotas de una función

Dada una función $f(x)$:

"$\boldsymbol{x = a}$ es asíntota <u>vertical</u> de $f(x)$ si $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \infty}$*".*

"$\boldsymbol{y = k \cdot x + b}$ es asíntota <u>oblicua</u> de $f(x)$si $\boxed{k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}}$ *y* $\boxed{b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - k\cdot x)}$*".*

"Si al intentar obtener la asíntota oblicua resulta $\boxed{k = 0}$*entonces la asíntota es horizontal. Ya que $\boldsymbol{y = b}$ es asíntota <u>horizontal</u> de $f(x)$si* $\boxed{b = \lim_{x\to\infty} f(x)}$*"*

Ejemplo:

$$y = \frac{x^2-1}{x+2}$$

<u>Asíntota vertical:</u>

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-1}{x+2} = \infty \to \lim_{x\to -2}\frac{x^2-1}{x+2} = \infty$$

$$\to por\ lo\ tanto\ \boxed{x = -2}\ Asíntota\ vertical\ de\ f(x)$$

<u>Asíntota oblicua:</u>

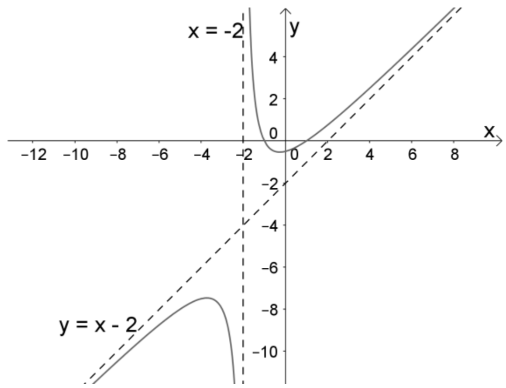
$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-1}{x+2}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2+2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x+2} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1-x^2-2x}{x+2} = \lim_{x\to\infty}\frac{-1-2x}{x+2} =$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x}-\frac{2x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x}-2}{1+\frac{2}{x}} = -2$$

$$\to por\ lo\ tanto\ \boxed{y = x - 2}\ Asíntota\ oblicua\ de\ f(x)$$

Los resultados se visualizan en la gráfica:



<u>EJERCICIO 6:</u> *Determinar la ecuación de las asíntotas (vertical, horizontal u oblicua) de las siguientes funciones:*

6.1 $y = \frac{x}{x+1}$

6.2 $y = \frac{x^2}{6+x}$

6.3 $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

6.4 $y = \sqrt{x^2 + 1}$

6.5 $y = \frac{x^2-1}{x+2}$

6.6 $y = \frac{x^2-16}{x^2-4}$