MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACIÓN

Universidad Nacional de San Juan

FACULTAD DE INGENIERÍA

Departamento de Matemática

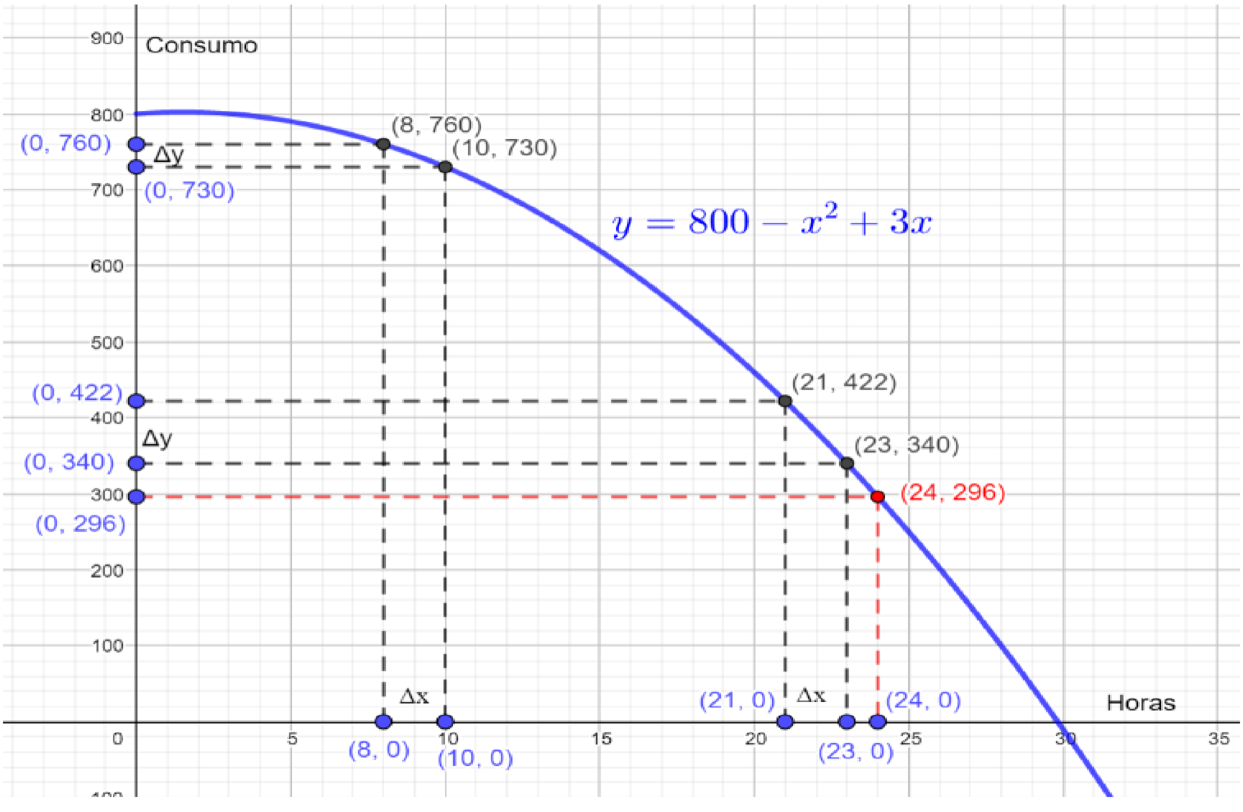
Cátedra: CÁLCULO I – ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Autoría: Equipo de Cátedra - 2022

GUÍA DE EJERCICIOS TEMA 3

DERIVADA

1- *Razón de cambio o Cociente incremental*



1.1- ***Ejemplo:*** *La gráfica de la figura muestra la variación de la cantidad de agua en un tanque de reserva de una casa familiar durante un día. La función que describe dicha variación está dada por*

$$f(t) = 800 - \ t^2 + \ 3\,t$$

a. ¿Cuál fue la razón de cambio o tasa promedio de uso de agua durante el día?

b. Encontrar la razón de cambio entre las 8:00 h y 10:00 h y entre las 21:00 h y 23:00 h.

c. ¿Qué tan rápido estaba siendo usada el agua a las 8:00 hs?

a. $Razón\ de\ Cambio = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$

$$Razón\ de\ Cambio = \frac{800-(t_0+\Delta t)^2 \ \ +3(t_0+\Delta t)-(800-{t_0}^2\ +3t_0)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{800-{t_0}^2-2t_0\Delta t-\Delta t^2+3t_0+3\Delta t-800+{t_0}^2-3t_0}{\Delta t} =$$

$$Razón\ de\ Cambio = \frac{-2t_0\Delta t-\Delta t^2+3\Delta t}{\Delta t} = -2t_0-\Delta t+3$$

Para el intervalo $[0{,}24]$; $\Delta t = 24$; $t_0 = 0$

$$Razón\ de\ Cambio = -2t_0-\Delta t+3 = -2(0)-24+3 = -21\,l/h$$

También podría calcularse como

$$Razón\ de\ Cambio = \frac{f(24)-f(0)}{24} = \frac{296-800}{24} = -21\,l/h$$

Que indica un **consumo promedio** *de 21* litros/hora

b. Para el intervalo $[8{,}10]$; $\Delta t = 2$; $t_0 = 8$

$$Razón\ de\ Cambio = -2(8)-2+3 = -15\,l/h$$

Para el intervalo $[21{,}23]$; $\Delta t = 2$; $t_0 = 23$

$$Razón\ de\ Cambio = -2(21)-2+3 = -41\,l/h$$

c. Para $\mathrm{t} = 8$

$$Razón\ de\ Cambio\ instantáneo = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} -2t-\Delta t+3 \ = -13\ l/h$$

Indica que el consumo a las 8.00 h fue de 13 litros por hora

Ejercicios propuestos:

1.2- *Un móvil tiene movimiento rectilíneo cuya relación con la distancia recorrida x (en metros) y el tiempo empleado t (en segundos) es* $x = 3t^2+2$

a. Calcular la velocidad media entre t = 2s y t = 4s.

b. Calcular la velocidad instantánea en t = 5s.

1.3- La ley de Boyle para los gases perfectos establece que a temperatura constante P.V=K donde P es la presión, V el volumen y K una constante. Si la presión está dada por la expresión: P(t) = 30 + 2t con P en cm de Hg, t en segundos; y el volumen inicial es de $60cm^3$*. Determinar la razón de cambio del volumen V con respecto al tiempo t a los 10 segundos.*

1.4- La cantidad de carga, Q, en coulomb (C) que ha pasado por un punto de un alambre hasta el tiempo t, medido en segundos, se expresa con $Q(t) = t^3 - 2t^2 + 6t + 2$ *. Sabiendo que ΔQ es la carga neta que pasa por el alambre durante un periodo de tiempo Δt y que la corriente promedio es la variación de la carga durante un periodo de tiempo:*

   a. Encontrar la corriente promedio en el intervalo de tiempo (0,5; 1).
   b. Encontrar la corriente instantánea $I(C/s)$*.*

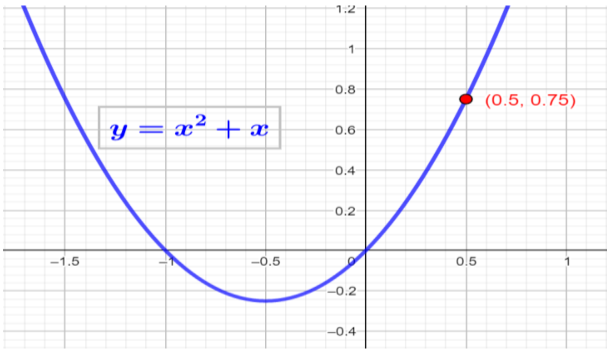
2- *Derivada por definición*

2.1- Dada la función $f(x) = x^2 + x$

a. Graficar la función.

b. Determinar la derivada de la función en punto $P\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$*, por definición.*

a.



b.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 + x_0 + \Delta x - ({x_0}^2 + x_0)}{\Delta x}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\frac{1}{2} + \Delta x\right)^2 + \frac{1}{2} + \Delta x - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\frac{1}{2}\Delta x + (\Delta x)^2 + \frac{1}{2} + \Delta x - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2 + \Delta x) = 2$$

Ejercicios Propuestos:

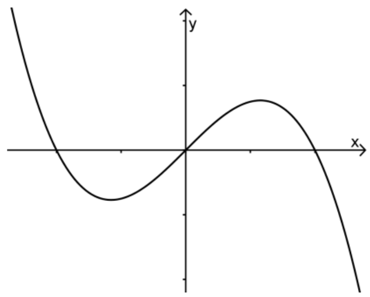
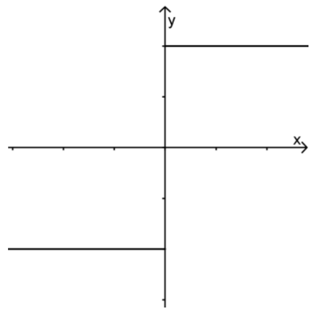
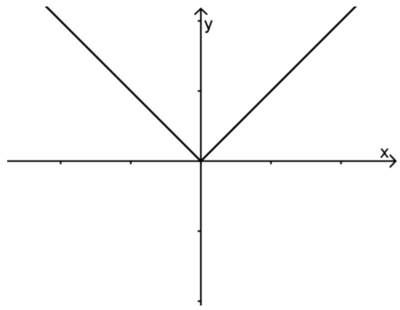
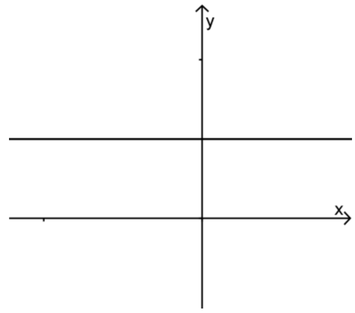
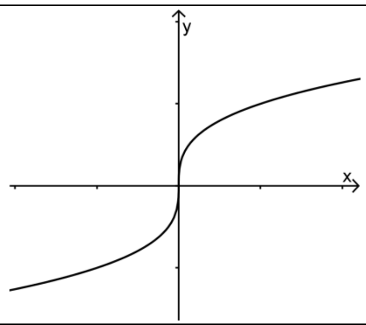
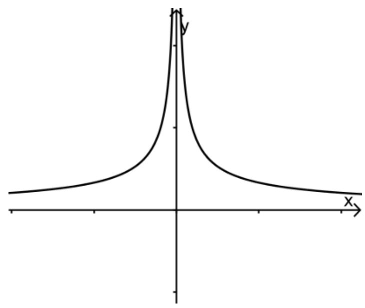
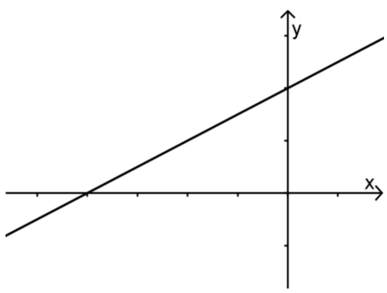
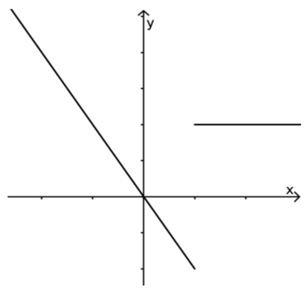
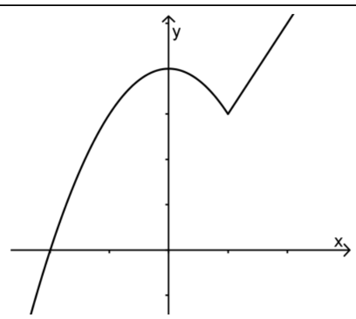
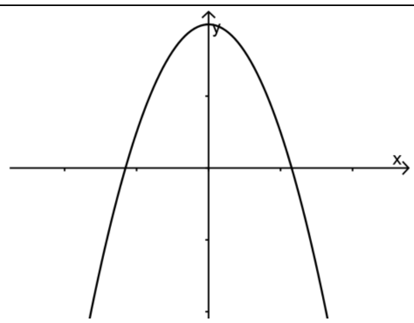
Dada la función obtener su función derivada aplicando la definición:

2.2- $f(x) = \frac{1}{x}$ *2.3-* $f(x) = x^3$

3- *Función y función derivada: relación gráfica*

a. Hacer corresponder a cada función de la primera columna con su función derivada de la segunda columna.

b. Analizar si las funciones son derivables en todo punto.

a) 	***1)*** 
b) 	***2)*** 
c) 	***3)*** 
d) 	***4)*** 
e) 	***5)*** 

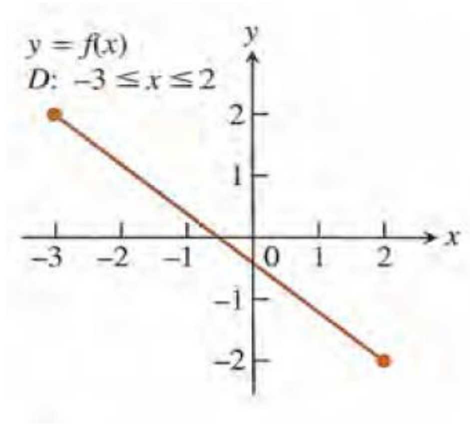
4- *Función derivable*

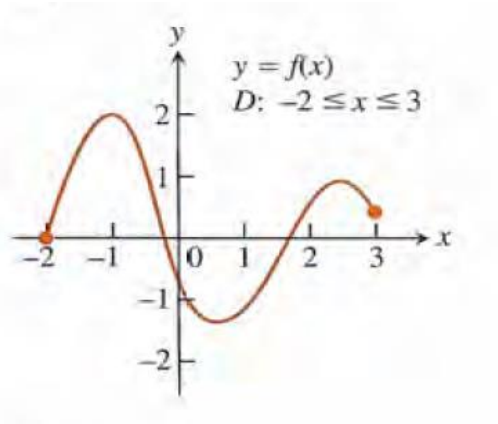
4.1- Cada figura en el ejercicio presenta la gráfica de una función en el intervalo cerrado D. ¿En qué puntos del dominio la función parece ser

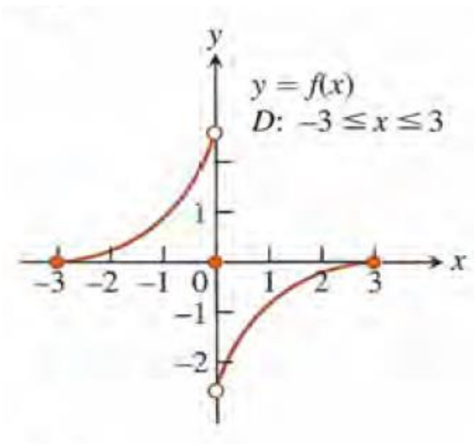
a. derivable?

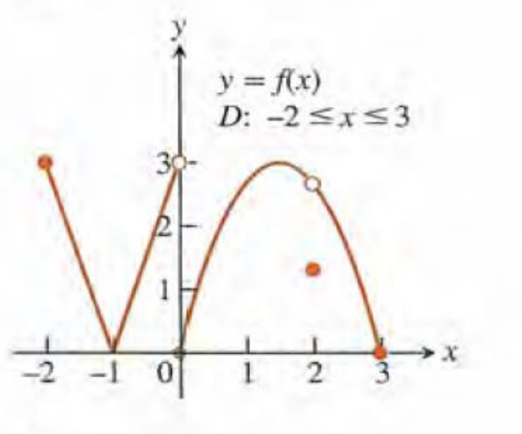
b. continua, pero no derivable?

c. ni continua ni derivable?

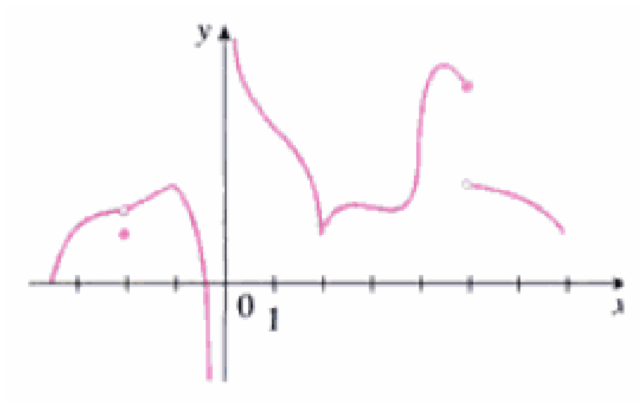








5- *Dada la gráfica de* $g(x)$



a. ¿En cuáles valores de x, la función es discontinua? ¿Por qué?

b. ¿En qué valores de x, la función no es derivable? ¿Por qué? ¿Coinciden con los valores del apartado a?

6- *Reglas de derivación*

6.1- Derivar usando las reglas (Nivel 1)

Ejemplos:

a. $y = -x^3 - \frac{x}{3}$

$$\boxed{y' = -3x^{3-1} - \frac{1}{3}1x^0 \rightarrow y' = -3x^2 - \frac{1}{3}}$$

b. $y = \frac{2}{x} - \sqrt[3]{x-4}$

$$y = 2x^{-1} - (x-4)^{\frac{1}{3}} \rightarrow y' = 2(-1)x^{-2} - \frac{1}{3}(x-4)^{\frac{1}{3}-1} = -2x^{-2} - \frac{1}{3}(x-4)^{-\frac{2}{3}}$$

$$\boxed{y' = -\frac{2}{x^2} - \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x-4}}}$$

Ejercicios propuestos:

6.2- Derivar:

c. $y = 3x^4 + 4x^2 + 3$

d. $y = \left(\frac{3}{4}x - 2\right)^2$

e. $y = \frac{1}{x-2}$

f. $y = -4x^{-2} + \sqrt{x}$

g. $y = \sqrt[3]{x^2}$

h. $y = \sqrt{3}x$

i. $y = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$

j. $y = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}$

k. $y = \sqrt{3}x^3 - \pi\, x + \sqrt{3}$

6.3- Derivar usando las reglas (Nivel 2)

Ejemplos:

a. $y = (2x^4 - 3x^{-1}) \cdot (x^2 - 2x + 4)$

$$\boxed{y' = (8x^3 + 3x^{-2})(x^2 - 2x + 4) + (2x^4 - 3x^{-1})(2x - 2)}$$

b. $y = tg^3(2x+3)$

$$\boxed{y' = 3\, tg^2(2x+3) \cdot sec^2(2x+3) \cdot 2}$$

c. $y = \frac{(-x+6)^3}{sec\, x}$

$$\boxed{y' = \frac{3(-x+6)^2 \cdot (-1) \cdot sec\, secx - (-x+6)^3 \cdot sec\, secx \cdot tg\, x}{sec^2\, x}}$$

Ejercicios propuestos:

6.4- **Derivar:**

d. $y = x\ ln\ x - e^2$ *e.* $y = cosx\ senx$ *f.* $y = \frac{\sqrt{2x-3}}{tg\ x}$

g. $y = cos^2 x + 3\ sen\ x$ *h.* $y = 3^{x-2}$ *i.* $y = -e^{\frac{x}{2}} - x$

j. $y = ln^2\left(\frac{2}{x}\right)$ *k.* $y = cotgx\ e^{-2x}$ *l.* $y = \frac{x}{ln(\sqrt{x})}$

m. $y = cos^4(\ 3\ x^4)$

6.5- ***Derivar usando las reglas (Nivel 3)***

a. $y = \frac{ln\ (x^4+6x^{-1})}{x+5x^3}$ *b.* $y = \frac{x^3 sen\ (\pi x)}{2x}$ *c.* $y = \frac{e^x + lnx}{x^2 - sen\ x}$

d. $y = cos^2(\ 4\ e^x)\ ln\left(\frac{tg\ x}{3^{x^2}}\right)$ *e.* $y = cosec^3 ln(\sqrt{x})$ *f.* $y = e^{-3x}\sqrt{1-x^2}$

g. $y = (2x^3 - 4x)^3\ tg^2(3x)$ *h.* $y = \frac{ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-x^2}}$ *i.* $y = ln\left(\frac{tg\ x}{e^{3\ x^2}}\right)$

j. $y = (sen\ x)^{cosx}$ *k.* $y = \frac{tg^2 x\ (x^2-x)}{lnx^2}$ *l.* $y = \left(\frac{x^2-3}{x^2+1}\right)^3$

7- ***Hallar la derivada de las siguientes funciones circulares inversas***.

a. $y = arcsen\ x$

$f(x) = arcsen\ x$ es inversa de $g(x) = sen\ x$ por lo que se cumple que:

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$$

$$(arcsen\ x)' = \frac{1}{(sen\ y)'} = \frac{1}{cos\ cosy} = \frac{1}{\sqrt{1-sen^2\ y}}$$

Y teniendo en cuenta que, al despejar: $sen\ y = x \rightarrow \boxed{y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

Ejercicios propuestos:

b. $y = arccosx$ *c.* $y = arctgx$

8- ***Hallar las derivadas sucesivas que se piden de las siguientes funciones***.

a. $f(x) = (-3x^2 + 4x)^2$

i. $f'(x) = \frac{dy}{dx} =$ *ii.* $f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} =$ *iii.* $f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} =$

b. $f(x) = e^{-2x}$

i. $f'(x) = \frac{dy}{dx} =$ *ii.* $f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} =$

iii. $f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} =$ *iv.* $f^{IV}(x) = \frac{d^4y}{dx^4} =$

c. $y = ln\,(x-1)$

i. $f'(x) = \frac{dy}{dx} =$ *ii.* $f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} =$ *iii.* $f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} =$

9- *Teoremas del valor medio*

9.1- Verificar si en las siguientes funciones cumplen las hipótesis del Teorema de Rolle. En caso afirmativo encontrar el o los valores de "c" en el intervalo dado.

$$y = x^3 - 4x + 1 \;\; en \;\; [-2, 2]$$

Solución: Se deben verificar las hipótesis del teorema:

- La función es continua en el intervalo cerrado ya que es un polinomio.
- La función es derivable en el intervalo abierto ya que si se deriva la función se obtiene una función polinómica que también es continua. Además, es derivable por lo que es una función continua y no presenta picos.
- $f(-2) = 1$; $f(2) = 1 \rightarrow f(-2) = f(2)$ La función vale lo mismo para ambos extremos del intervalo.

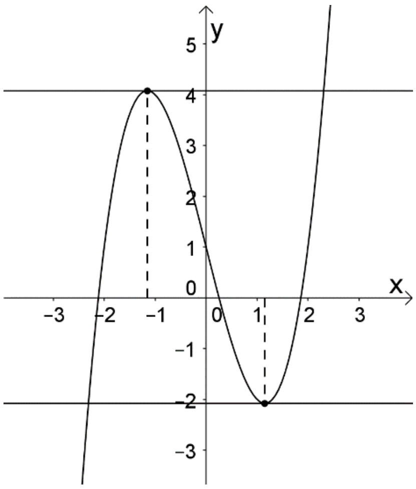
Por ello, el teorema de Rolle se cumple, por lo que existe por lo menos un valor de x=c para el cual la derivada es nula. Para determinar el valor de c se procede a derivar y aplicar la hipótesis:

$$y' = 3x^2 - 4$$

$$0 = 3c^2 - 4$$

$$3c^2 = 4$$

$$c^2 = \frac{4}{3} \rightarrow |c| = \sqrt{\frac{4}{3}} \quad \begin{cases} c_1 = -1{,}15 \\ c_2 = \;\;\, 1{,}15 \end{cases}$$



Y ambos valores de c pertenecen al intervalo.

Puede verificarse la interpretación geométrica del teorema trazando las tangentes a la curva en los puntos encontrados.

9.2- $y = \sqrt[3]{x}$ *en* $[-2; 2]$

Solución: Se deben verificar las hipótesis del teorema:

- La función es continua en el intervalo cerrado ya que existe para todos los valores de x de este.
- La función no es derivable en todos los puntos del intervalo abierto ya que la derivada de la función es: $y' = \frac{1}{3 * \sqrt[3]{x^2}}$, puede observarse que la derivada no existe para x=0.

Por ello, **no se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle por lo que no se cumple el teorema.**

Ejercicios propuestos:

9.3- $y = x^2 - 1$ *en* $[0, 1]$

9.4- $y = \frac{x^3 - x^2 - 9x + 9}{x - 1}$ *en* $[-3, 3]$

9.5- $y = x^3 + 2x^2 - x$ *en* $[-2, 1]$

9.6- *Verificar si en las siguientes funciones cumplen las hipótesis del Teorema de Lagrange. En caso afirmativo encontrar el o los valores de "c" en el intervalo dado.*

$y = \sqrt{x + 1}$ *en* $[-1, 3]$

Solución: Se deben verificar las hipótesis del teorema:

- La función es continua en el intervalo ya que puede obtenerse la raíz cuadrada de cualquier número positivo.
- La función es derivable en el intervalo abierto ya que si se deriva la función se obtiene una función que también es continua en ese intervalo. Además, es derivable por lo que es una función continua y no presenta picos.

$$y = \sqrt{x + 1} \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x + 1}}$$

Obsérvese que la derivada no existe en x=-1 (extremo izquierdo del intervalo) pero como el análisis de derivabilidad debe hacerse en el intervalo abierto este valor no debe considerarse.

Por ello, el teorema de Lagrange se cumple, por lo que existe por lo menos un valor de x=c para el cual puede predecirse el valor de la derivada. Para determinar el/los valor/es de c se procede a derivar y aplicar la tesis:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x + 1}}$$

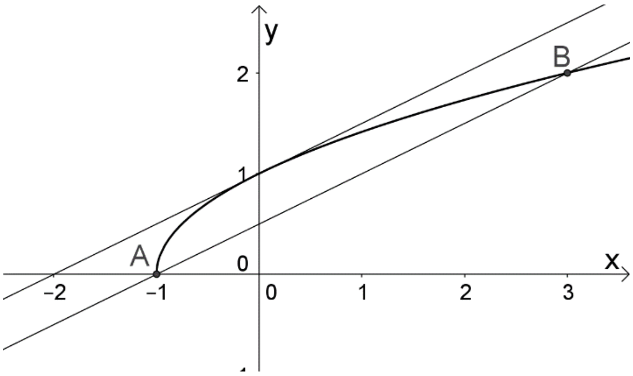
$$\frac{1}{2\sqrt{c + 1}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\sqrt{b + 1} - \sqrt{a + 1}}{b - a} = \frac{\sqrt{3 + 1} - \sqrt{-1 + 1}}{3 - (-1)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{c+1}} = \frac{1}{2}$$

$$1 = \sqrt{c+1}$$

$$1 - 1 = c \rightarrow \boxed{c = 0 \in [-1, 3]}$$

Puede verificarse la interpretación geométrica del teorema trazando la tangente a la curva en el punto encontrado y comparando con la secante que une los puntos extremos del intervalo.



Ejercicios propuestos:

Verificar si en las siguientes funciones cumplen las hipótesis del Teorema de Lagrange. En caso afirmativo encontrar el o los valores de "c" en el intervalo dado.

9.7- $y = \frac{x^3 - x^2 - 3x}{x}$ en $[-1, 2]$

9.8- $y = x^3 - 3x + 1$ en $[-2, 0]$

9.9- $y = sen\, x$ en $\left[\frac{\pi}{4}, 2\pi\right]$

10-*A las 14 h el velocímetro de un automóvil indica 30 km/h. A las 14.10 h indica 50 km/h. Demuestre que en algún momento entre las 14h y 14.10 h la aceleración (dV/dt) es 120 km/h.*

11-*Un termómetro de mercurio tardó 14s en subir de -19 °C a 100 °C cuando se sacó de un congelador y se colocó en agua hirviendo. Demuestre que en algún momento el mercurio está subiendo a razón (dT/dt) de 8,5 °C/s.*