MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACIÓN
Universidad Nacional de San Juan

FACULTAD DE INGENIERÍA

Departamento de Matemática

Cátedra: CÁLCULO I – ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Autoría: Equipo de cátedra - 2022

TEMA 4

APLICACIONES DE LA DERIVADA

4.1 - Ecuaciones de las rectas tangente y normal

Se examina el problema de tratar de hallar la ecuación de la recta tangente, a una curva C que representa gráficamente la función *y = f(x) en* un punto de coordenadas *P(a,f(a))* , entonces se considera en un punto cercano *Q(x,f(x))*, donde $x \neq a$. y se calcula la pendiente de la recta secante PQ : $m_{PQ} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

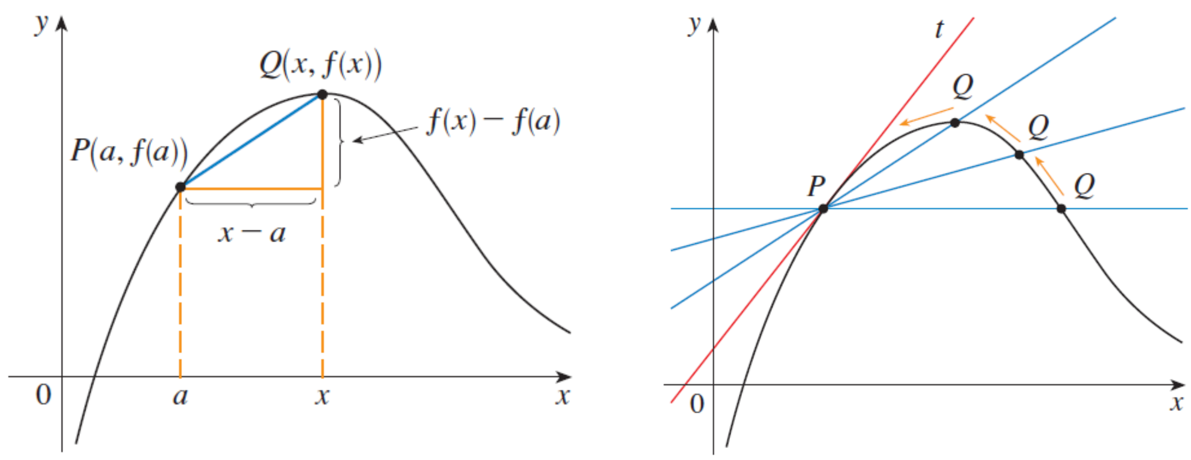


Figura 4.1

A continuación, se acerca Q a P a lo largo de la curva C, haciendo que x tienda a a. Si m_{PQ} tiende a un número m, entonces se define la recta tangente como la recta que pasa por P con pendiente

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Figura 4.1 Esta definición es la misma de la interpretación geométrica de la derivada, entonces se puede definir:

Definición: Recta Tangente

La recta tangente a la curva y = f(x) en el punto P(a,f(a)) es la recta que pasa por (a,f(a)) cuya pendiente es igual a f'(a) (la derivada de f en a)

Si usa la forma punto pendiente de la ecuación de una recta, se puede escribir una ecuación de la recta tangente a la curva *y = f(x)* en el punto *(a, f(a)):*

Ecuación de la Recta tangente:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

- Ecuación de la recta normal

Dos rectas son perpendiculares si sus pendientes son recíprocas y de signo contrario. Esto es:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{f'(x_1)} \text{ o bien ; } tg\beta = -\frac{1}{tg\alpha}$$

Luego, la ecuación de la recta normal, siempre que $f'(x_1) \neq 0$, es: $y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1)$ Que también puede formularse:

Ecuación de la Recta Normal:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a) \; ; \quad f'(a) \neq 0$$

Nota: Cuando $f'(a) = 0$, no se puede aplicar esta última expresión, pero en este caso la recta tangente es paralela al eje x. Por ello la recta normal es paralela al eje y y su ecuación viene dada por: $x = a$

Ejemplo: Determinar las ecuaciones de la recta tangente y de la normal a la parábola $y = x^2$ para x=3, es decir en el punto P(3; 9).

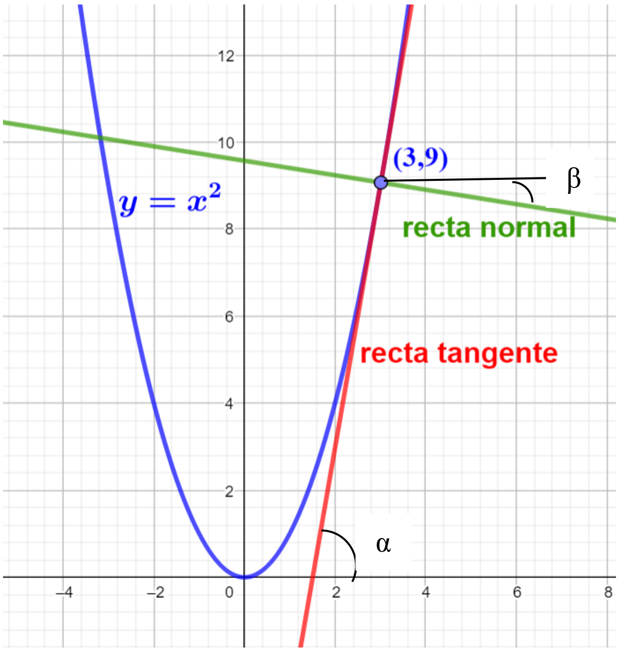


Figura 4.2

Reemplazando en las ecuaciones de la recta tangente y normal respectivamente:

$$f'(x) = 2.x$$

$$f'(x_1) = f'(3) \ = 6$$

Recta tangente:

$y - 9 = 6(x - 3)$ o bien $y = 6x - 9$

$$-\frac{1}{f'(3)} = -\frac{1}{6}$$

Recta Normal:

$$y - 9 = -\frac{1}{6}(x - 3) \text{ o bien } y = -\frac{1}{6}x + \frac{19}{2}$$

4.2 – Diferencial

Existen muchas situaciones, en que se necesita estimar una diferencia, como por ejemplo encontrar aproximaciones de valores de funciones, en el cálculo de errores al efectuar mediciones (valor real menos valor aproximado) o simplemente al calcular variaciones de la variable dependiente cuando la variable independiente varía, etc. Se utiliza a la recta tangente como la mejor aproximación lineal a la función en las cercanías del punto de tangencia.

4.2.1 – Definición de diferencial

Dada una función *f(x)* derivable en *(a,b)* y *x* un punto de dicho intervalo, arbitrario pero fijo, por definición de derivada: $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ donde *f '(x)* es un valor determinado.

Por teorema de infinitésimos se tiene que:

$$\underbrace{\frac{\Delta y}{\Delta x}}_{función} = \underbrace{f'(x)}_{\substack{valor\ del \\ límite}} + \underbrace{\alpha(\Delta x)}_{infinitésimo}$$

donde $\alpha(\Delta x)$ es un infinitésimo cuando $\Delta x \to 0$, despejando Δy se obtiene:

$$\Delta y = \underbrace{f'(x)\,\Delta x}_{\substack{parte \\ principal}} + \underbrace{\alpha(\Delta x)\Delta x}_{\substack{infinitésimo \\ de\ 2°\ orden}} \qquad \textbf{(1)}$$

En el segundo miembro de la **(1)**, el primer sumando (para $f'(x) \neq 0$) recibe el nombre de "Parte principal del incremento Δy", es lineal con respecto a Δx**.** El segundo sumando es un es infinitésimo de segundo orden cuando $\Delta x \to 0$ (recordar que el producto de dos infinitésimos en un punto, es otro infinitésimo en dicho punto). La parte principal da origen a la:

Definición de Diferencial:

Dada una función y=f(x) se define como diferencial dy *de la función a:*

$$dy = f'(x)\,\Delta x \quad \textbf{(2)}$$

Se observa que ***y*** es la variable dependiente, y ***x*** es la variable independiente, luego, para toda función real de una variable real *x*, se verifica *x*=*x* (*x* función de si misma). Si se aplica la definición de diferencial a esta función, resulta: $dx = x'\Delta x$, como $x'=1$**,** surge que $dx = \Delta x$

Así la diferencial de la variable independiente *x* simbolizada por *dx* coincide con su incremento Δx , por lo tanto la fórmula **(2)** puede expresarse:

$$dy = f'(x)\,dx \qquad \textbf{(3)}$$

Que da lugar a la "**Notación de Leibnitz"** para la derivada: $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, dy es una variable dependiente, depende de los valores de x y Δx. Si se dan ellos, entonces dy está determinado.

4.2.2 – Interpretación geométrica de la diferencial

Dada *y = f(x)*, derivable en un entorno *E(x)*, se ve la interpretación geométrica de la diferencial: Para ello, se traza la recta tangente por un punto cualquiera P(x, y), luego se da a x un incremento arbitrario Δx = PM.

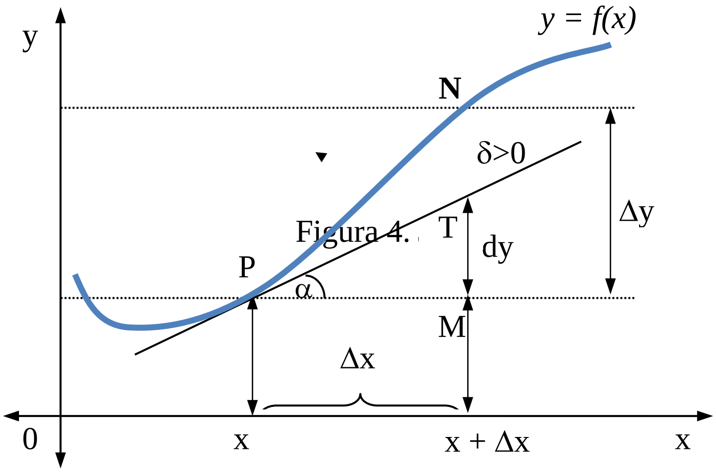


Figura 4.

En el triángulo rectángulo **PMT**, se tiene:

$$tg\ \alpha = \frac{MT}{PM} = \frac{MT}{\Delta x} \Rightarrow MT = \Delta x\ tg\ \alpha\ ; \quad \text{Pero} \quad tg\ \alpha = f'(x)$$

Luego: $MT = f'(x)\Delta x$, es decir $MT = dy$

Se observa que el segundo miembro es la diferencial, luego:

Interpretación Geométrica de la Diferencial:

La diferencial de f(x), es igual al incremento que sufre la ordenada de la recta tangente a la curva y=f(x), cuando se incrementa en Δx la variable independiente x.

4.2.3 – Propiedades de la diferencial

Como consecuencia de la definición de la diferencial de una función, se cumple:

1) $dc = 0$, donde c = constante

2) $dx = \Delta x$, cuando x es variable independiente

3) $d\,[c.\,u(x)] = c.du(x)$

4) $d[u(x) \pm v(x)] = du(x) \pm dv(x)$

5) $d[u(x)\,.\,v(x)] = du(x)\,.\,v(x) + u(x)\,.\,dv(x).$

6)

$$d\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right] = \frac{du(x).v(x) - u(x).dv(x)}{v^2(x)},\ \ con\ v(x) \neq 0$$

7) $df(u) = f'(u)\,.\,du, \qquad u = u(x).$ Donde $du = u'(x).\,dx$

Las propiedades **3)** y **4)** indican la linealidad de la diferencial y la propiedad **7)** expresa la invariancia de la expresión analítica de la diferencial.

4.2.4 – Aplicación de la diferencial al cálculo aproximado

En algunas ocasiones es posible aproximar funciones complicadas con otras más sencillas, las cuales ofrecen la precisión que necesitamos para aplicaciones específicas y a la vez son más fáciles de utilizar. La aproximación mediante rectas tangentes se denomina aproximación lineal o linealización.

Aproximación lineal: Si se observa la gráfica de y = x^2 junto a su recta tangente en el punto (1,1), se ve que la recta tangente está muy próxima a la función en el entorno del punto (1,1), entonces en ese entorno los valores de y de la recta tangente dan una buena aproximación a los valores de la función.

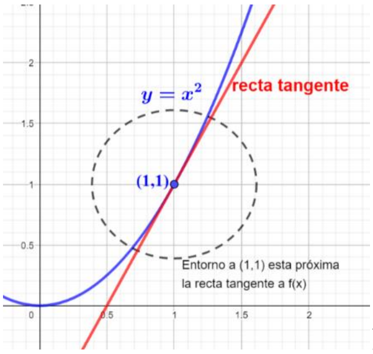


Figura 4.4

La idea es que puede resultar fácil calcular un valor *f(a)* de una función, pero difícil (si no es que imposible) calcular valores cercanos de *f(x)*. Por lo tanto se recurre a los valores calculados fácilmente con la función lineal cuya gráfica es la recta tangente de *f(x)* en el punto *(a,f(a))*. En otras palabras:

Una curva en puntos próximos al punto de tangencia está "muy cerca" de su recta tangente. Si es difícil calcular valores cercanos a x=a de la curva f(x), se aproximan estos valores valiéndose de la recta tangente, cuya ecuación es:

$$\boldsymbol{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a)}$$

recta que pasa por el punto (a, f(a)) y tiene por pendiente f '(a) y $\boldsymbol{\Delta x = x - a}$

La igualdad: $\Delta y = dy + \alpha_{(\Delta x)} \Delta x$ indica que:

El incremento de la función (Δy), difiere de la diferencial de la función en un infinitésimo de orden superior, lo que sugiere que: Δy ≅ dy

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{dy + \alpha(\Delta x)\Delta x}{f'(x)\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{dy}{f'(x).\Delta x} + \frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{f'(x)\Delta x}\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \left[1 + \frac{\alpha(\Delta x)}{f'(x)}\right] = 1$$

Es decir que ***Δy* y *dy* son infinitésimos equivalentes cuando *Δx* → *0* con *f'(x)≠0***, lo que indica que tienen un comportamiento semejante cuando *Δx→0*. Esto permite, en la mayoría de los casos, utilizar indistintamente *Δy o dy*, cuando *Δx→0* con un error muy pequeño.

En cálculos aproximados, si se desarrolla $\Delta y \approx dy$:

$$\boldsymbol{\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \cong f'(x)\Delta x \cong dy}$$

de donde se obtiene:

$$\boldsymbol{f(x + \Delta x) \cong f(x) + f'(x)\Delta x}$$

Lo que posibilita calcular el valor aproximado de *f(x+Δx)* en un punto próximo a *x* *(Δx→0)*, conociendo *f(x)* y *f ’(x)* en *x* arbitrario pero fijo. **La diferencia entre el valor aproximado y el valor exacto de $f(x + \Delta x)$ es el error cometido en el cálculo, y viene dada por el infinitésimo $\alpha(\Delta x)$.**

Ejemplo: Dada la función $y = x^2$ calcular el incremento Δy , la diferencial dy , el valor aproximado y el valor exacto.

a) Para los valores arbitrarios de x y Δx.

$f'(x) = y' = 2x$

$dy = f'(x)dx \quad siendo\ \Delta x = dx$

$dy = 2x.\Delta x$

Valor aproximado: $f(x + \Delta x) \cong x^2 + 2x\,\Delta x$

Valor exacto: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ entonces $f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y$

b) Para los valores x=1 y Δx=0,1.

$f'(1) = y' = 2.1 = 2$

$dy = 2x.\Delta x = 2.1.0.1 = 0.2$

Valor aproximado:

$f(1 + 0{,}1) \cong 1^2 + 2.1.0{,}1$

$\boldsymbol{f(1,1) \cong 1,2}$ aproximación

Valor exacto:

$f(1) = 1^2 = 1 \quad , \quad f(1 + 0{,}1) = f(1{,}1) = 1{,}1^2 = 1{,}21$

$\Delta y = f(1{,}1) - f(1) = 1{,}21 - 1 = 0{,}21$

$\boldsymbol{f(1,1) = 1 + 0,21 = 1,21}$ exacto

Observar diferencia.
Conclusión: el diferencial es una buena aproximación al valor verdadero de f(x) en puntos del E(x)

Ejemplo: El radio r de un círculo aumenta de r = 10 m a 10.1 m (Figura 4.5). Utilice dA para estimar el incremento en el área A del círculo. Estime el área del círculo agrandado y compare su estimación con el área verdadera mediante el cálculo directo.

Puesto que $A = f(r) = \pi r^2$ el aumento estimado es:

$$dA = f'(r).dr = 2\,\pi r\,dr = 2\pi\,.10.0{,}1 = 2\pi\,m^2$$

Como $A(r + \Delta r) \cong A(10) + dA \cong \pi.10^2 + 2\pi = 102\,\pi\,m^2$

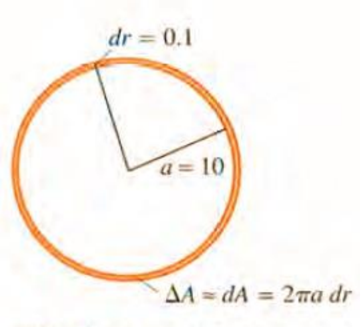


Figura 4.5

El área del círculo de radio 10,1 m es aproximadamente 102π m^2

El área real es: $A(10{,}1) = \pi.(10{,}1)^2 = 102{,}01\,\pi$ m^2

El error en la estimación es: $0{,}01\pi$ m^2

Ejemplo: Se debe esterilizar una lata cuyo contendido al momento de envasar está a una temperatura de 50°C y entonces se lo mete a un horno a 325°C. Pasada una hora la temperatura en el interior de la lata es de 93°C y después de 2 horas indica 129°C. Predecir la temperatura de la lata a las 3 horas.

Solución: Si T(t) represente la temperatura del contenido de la lata
Se conoce T(0)=50, T(1)=93 y T(2)=129. Con el objeto de hacer una aproximación lineal con t=2, se necesita una estimación de la derivada T'(t) en t=2.

$$T'(2) = \lim_{t \to 2} \frac{T(t) - T(2)}{t - 2}$$

Se puede estimar T'(2) por medio del cociente incremental:

$$T'(2) \cong \frac{T(1) - T(2)}{1 - 2} = \frac{93 - 129}{-1} = 36$$

Se ha usado la razón de cambio promedio para hacer la aproximación al valor de la derivada. Con esta estimación la aproximación lineal para la temperatura después de 3 horas es:

$$T(3) \cong T(2) + T'(2).(3 - 2) = 129 + 36\,.\,1 = 165$$

Por consiguiente, la temperatura prevista luego de que transcurren 3 horas es de 165°C.

4.3 Aproximaciones de orden superior. Fórmula (Polinomio) de Taylor

La aproximación lineal de una función *f(x)* derivable en un punto *x* = *a* es un polinomio de grado uno.

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Si *f(x)* tiene derivadas de orden mayor en a, entonces tambien tiene aproximaciones polinómicas de orden mayor, una para cada derivada disponible. Estos polinomios se conocen con el nombre de Fórmula o Polinómio de Taylor de *f(x)*.

4.3.1 – Formula de Taylor

El propósito de este tema es usar las funciones polinómicas como aproximaciones de otras funciones elementales. Realizar el desarrollo por Taylor es efectuar una aproximación a una función f(x), en el entorno de un punto a del dominio de la función, mediante un polinomio de grado prefijado, que mejor aproxime.

La finalidad es construir un polinomio en potencias de *x-a*, puesto que ello permite poder reemplazar en las inmediaciones del punto *a*, con cierto error, una función, tal vez compleja en algunos aspectos, por el polinomio, que resulte con propiedades sencillas en lo referente a su manipulación y utilización en modelos matemáticos, además de ser fácil de derivar, integrar, etc.

Se imponen condiciones que debe cumplir la función y el polinomio para conseguir una aproximación apropiada para cada caso.

Para construir el polinomio $y = P_n(x)$ de grado *n, que aproxime a otra función f(x),* se comienza con un punto $x = a$, en el dominio de *f(x)*, siendo el valor del polinomio en el punto $x = a$ igual al de la función *f(x)* en el mismo punto, $P(a) = f(a)$, y los valores de las derivadas de *P(x)* hasta el n-ésimo orden, tomadas en el punto $x = a$, sean iguales a los valores de las derivadas correspondientes de la función *f(x)* en el mismo punto.

Las condiciones que debe tener la función para poder obtener un polinomio de Taylor son:

La función y = f(x) debe ser continua en un entorno no reducido del punto x = a, y derivable en él hasta el orden (n+1) inclusive, con la derivada (n+1) continua.

Es de esperar que este polinomio *P(x)*, será "próximo" a la función *y = f(x)*, al menos en las cercanías del punto *a.* Se dice que la aproximación está centrada en *x = a*.

Sea entonces:

$$P_n(a) = f(a);\quad P'_n(a) = f'(a);\quad P''_n(a) = f''(a);\ldots\ldots\ldots;\ P^{(n)}{}_n(a) = f^{(n)}(a); \qquad \mathbf{(1)}$$

Hallar el polinomio, siguiendo las potencias de *(x – a)* con coeficientes indeterminados C_i

$$P_n(x) = C_o + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + C_3(x-a)^3 + \ldots + C_n(x-a)^n \qquad \mathbf{(2)}$$

Los coeficientes indeterminados C_1, C_2, C_3, ... ,C_n, se calculan de tal modo que se cumplan las condiciones de **(1)**. Para ello, se encuentran previamente las derivadas del polinomio $P_n(x)$:

$$\begin{aligned}
&P'_n(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 + \ldots + nC_n(x-a)^{n-1}\\
&P''_n(x) = 2C_2 + 3\cdot 2C_3(x-a) + \ldots + n\cdot(n-1)C_n(x-a)^{n-2}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \mathbf{(3)}\\
&P^{(n)}{}_n(x) = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1\cdot C_n
\end{aligned}$$

Sustituyendo *x* por el valor de *a* en los dos miembros de las igualdades **(2)** y **(3)** e imponiendo las condiciones **(1)**, se obtiene:

$$C_0 = f(a);\ \ C_1 = f'(a);\ \ C_2 = \frac{f''(a)}{2!};\ \ C_3 = \frac{f'''(a)}{3!};\ \ldots\ ;\ \ C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad \mathbf{(4)}$$

De donde resulta:

$$P_n(a) = f(a) = C_0$$
$$P'_n(a) = f'(a) = C_1$$
$$P''_n(a) = f''(a) = 2 \cdot 1 \cdot C_2 = 2! \cdot C_2$$
$$P'''_n(a) = f'''(a) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot C_3 = 3! \cdot C_3$$
....
$$P^{(n)}_n(a) = f^{(n)}(a) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) ... 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot C_n = n!\ C_n$$

Si introducimos en la fórmula **(2)** los valores hallados para C_1, C_2, C_3,..., C_n, se obtiene el polinomio buscado, que se denomina **Fórmula de Taylor:**

$$Pn\ (x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2\,!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3\,!} f'''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n\,!} f^n(a) \qquad \textbf{(5)}$$

Observar que si x es suficientemente próximo a a entonces $(x\text{-}a) \to 0$ y $p_n(x) \to f(x)$. Entonces se tendrá:

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!} f^n(a) \qquad \textbf{(6)}$$

La fórmula de Taylor puede enunciarse así: “El incremento de una función entera al pasar de un valor a de la variable independiente a otro x, resulta ser igual a la suma de los productos de las potencias del incremento de la variable por las derivadas sucesivas, tomadas en el punto inicial, divididas por las factoriales respectivas”.

La fórmula **(6)** demostrada para las funciones enteras pone de manifiesto el significado de los coeficientes del polinomio, en relación con las derivadas de $f(x)$ en el punto $x=a$.

Tomando este resultado como punto de partida, logró Taylor generalizarlo para toda clase de funciones que admitan derivadas sucesivas, desarrollándolas en serie, y expresar la función como suma de un polinomio, más un término complementario llamado $R_n(x)$. *“Esta es una forma aproximada de desarrollar las funciones trascendentes por medio de funciones algebraicas”.*

Es importante en todo método de aproximación tener una idea de la magnitud del error cometido al usarlo. Para medir la precisión de la aproximación de una función $f(x)$ por el polinomio de Taylor $P_n(x)$, se utiliza el resto $R_n(x)$, definido como sigue.

Si $f(x)$ es una función cualquiera y se designa por $R_n(x)$ la diferencia entre el valor de la función dada $f(x)$ y el del polinomio calculado $P_n(x)$, resulta: $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$

De donde: $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$. Ver Figura 4.6.

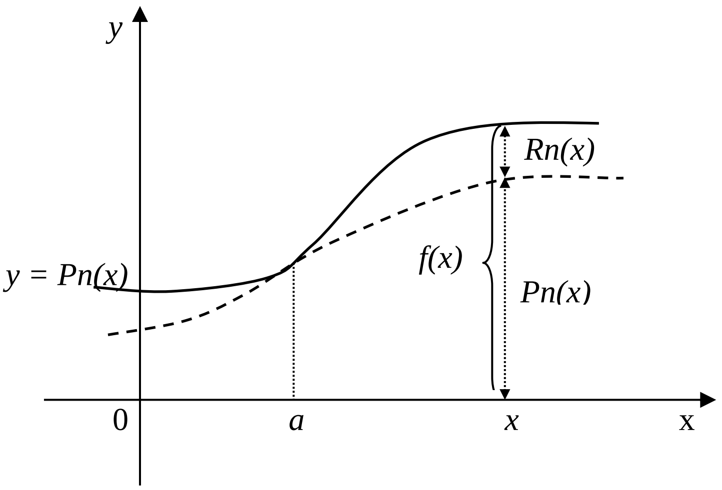


Figura 4.6

O bien puesto en forma desarrollada:

$$\boxed{f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2\,!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3\,!}f'''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n\,!}f^n(a) + R_n(x)} \qquad \textbf{(7)}$$

El término $R_n(x)$ recibe el nombre de "Resto" o "Término Complementario". Para aquellos valores de x en los que el término complementario $R_n(x)$ es pequeño, el polinomio $P_n(x)$ da un valor aproximado de la función $f(x)$.

Así es que la fórmula **(7)** *permite sustituir la función y = f(x) por el polinomio:*

$$y = P(x)$$

Con un grado determinado de precisión, igual al valor del término complementario $R_n(x)$.

Lagrange encontró para el término complementario, $R_n(x)$, una expresión similar a la de los términos anteriores, y que se denomina "término complementario de Lagrange":

$$\boxed{R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)\,!}f^{(n+1)}(\xi)}$$

Donde ξ es un punto intermedio comprendido entre a y x, es decir $a < \xi < x$ lo cual puede expresarse en la forma:

$$\xi = a + \theta(x-a) \text{ con } 0 < \theta < 1$$

En éste caso el término complementario de Lagrange toma la forma:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta(x-a)) \qquad \textbf{(8)}$$

Sustituyendo esta expresión de $R_n(x)$ en **(7)** se obtiene la **(9)**, que es la **forma general de la Fórmula de Taylor para la función *f(x)*.**

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^n(a) + \\ + R_n(x) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta(x-a)) \qquad \textbf{(9)}$$

4.3.2 – Fórmula de Mac Laurin

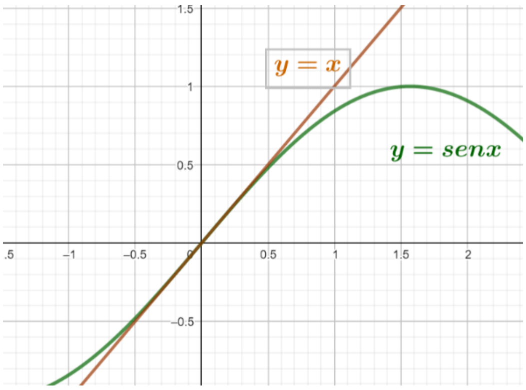
Si en la Fórmula de Taylor, se toma en particular el valor $a = 0$, la **(9)** se convierte en:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^n(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \quad \text{con } 0 < \theta < 1$$

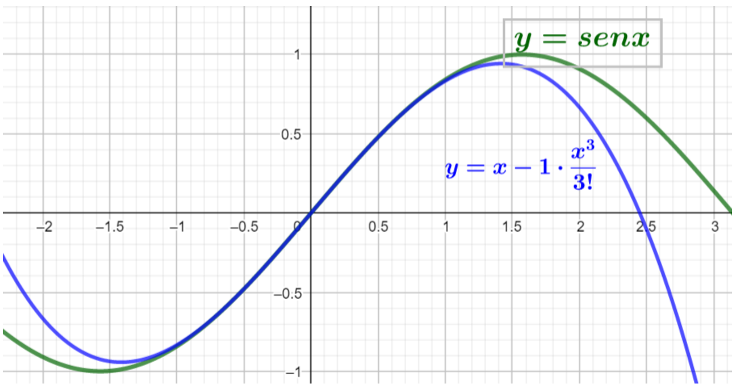
Que toma el nombre de “Fórmula de Mac Laurin”.

Ejemplo: Sea la función $f(x) = sen(x)$ considerada en un entorno del origen, $E(_0)$, calcular sus tres primeras aproximaciones, P_1, P_2, P_3, y graficar

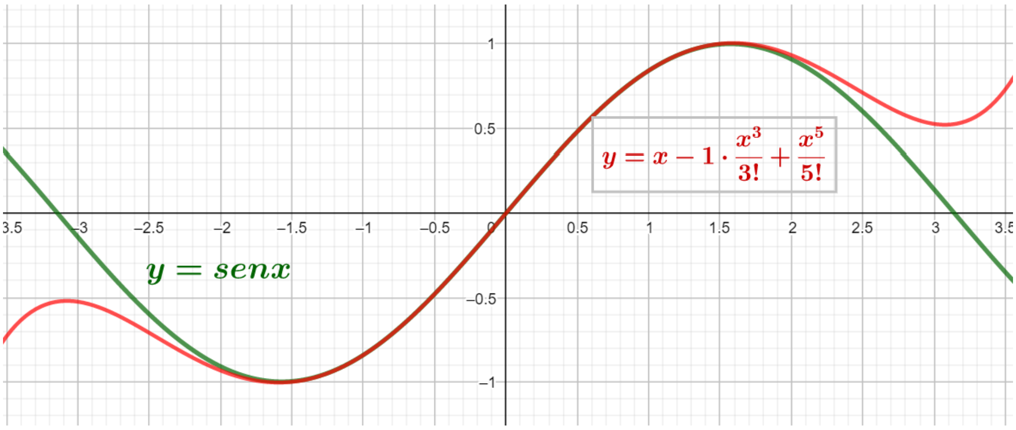
$$\left.\begin{array}{ll} f(x) = \text{sen } x; & f(0) = \text{sen}(0) = 0 \\ f'(x) = \cos x; & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\text{sen } x; & f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -\cos x; & f'''(0) = -1 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} P_1(x) = x \\ P_2(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} \\ P_3(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} \end{array}$$



(a) $P_1(x)$



(b) $P_2(x)$



(c) $P_3(x)$

Figura 4.7

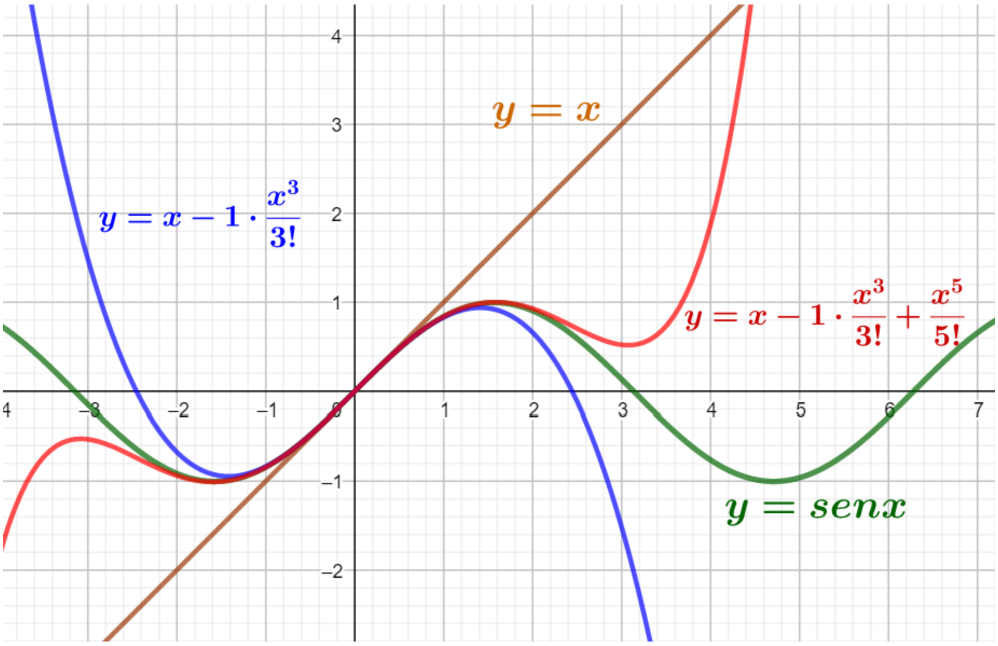


Figura 4.8

En general para $y = sen(x)$

$$P_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ \dots \ \pm \frac{x^n}{n!}$$

$$sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ \dots \ \pm \frac{x^n}{n!} \pm \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!}\left(sen(\theta \cdot x)\right)^{(n+1)}$$

Observación: De la gráfica, Figura 4.7 se pueden obtener varias conclusiones. Entre ellas: Que en las cercanías de *x=0*, la gráfica de la función *seno* y de la recta *y=x* son muy próximas. Ya con el primer término se tiene una excelente aproximación. La segunda aproximación mejora sensiblemente, aun para valores de *x* no tan próximos al cero. Se observa que la tercera aproximación es muy buena, aun para valores de *x* mayores que π/2 es decir, ya para valores más alejados del origen.

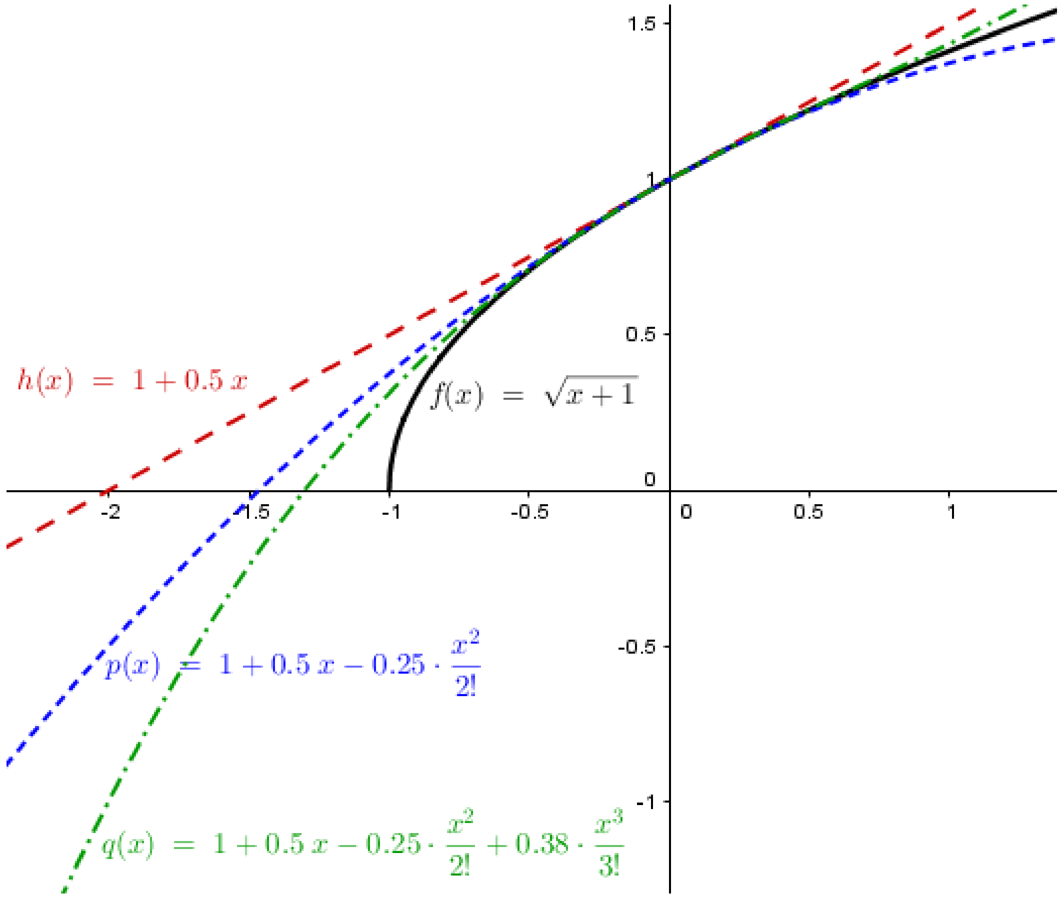
Ejemplo: Desarrollar las aproximaciones de orden 1, 2 y 3 de la función $f(x) = \sqrt{x+1}$, mediante la fórmula de Mc. Laurin y graficar la función y los polinomios de aproximación,

$$f(0) = \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\,(x+1)^{-\frac{1}{2}}\Big|_{x=0} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \quad h(x) = 1 + \frac{1}{2}x$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}\,(x+1)^{-\frac{3}{2}}\Big|_{x=0} = -1/4 \qquad \Rightarrow \quad p(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\frac{x^2}{2}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8}\,(x+1)^{-\frac{5}{2}}\Big|_{x=0} = \frac{3}{8} \qquad \Rightarrow \quad g(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}\frac{x^3}{3!}$$



4.4 – Regla de Bernoulli L'Hospital

Introducción: Si se quiere conocer el valor del límite $\lim_{x\to 1} \frac{\ln 1}{x-1}$ no se pueden aplicar las reglas algebraicas para encontrar su valor, ya que los valores del numerador y del denominador son cero.

En general, si se tiene un límite de la forma $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ donde *f(x) →0 y g(x)→0 cuando x→a*, entonces este límite puede existir o no y se conoce como **forma indeterminada del tipo** $\mathbf{\frac{0}{0}}$

La razón $\frac{f(a)}{\varphi(a)}$ no está definida cuando $x=a$, pero tiene sin embargo, un significado bien determinado, para todo $x \neq a$. Por lo tanto, se puede plantear el problema de encontrar el límite de esta razón cuando $x\to a$. El tipo de problema de tener que calcular el límite de indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ ya se presentó cuando se consideró, por ejemplo, el $\lim_{x\to 0} \frac{sen\,x}{x}$. Este es un caso en el que la expresión $\frac{sen\,x}{x}$ carece de sentido cuando *x=0*, es decir la misma no está definida en cero, pero se vio que el $\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}$ existe y es igual a uno. La regla en estudio permite obtener, en forma inmediata, este resultado.

Otra situación en que un límite no es obvio es cuando se busca una asíntota horizontal y se necesita evaluar el límite $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x-1}$

No es evidente como evaluar este límite porque numerador y denominador tienden a ∞ cuando x tiende a ∞.

En general, si se tiene un límite de la forma $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ donde *f(x) →∞ y g(x)→∞ cuando x→∞*, entonces este límite puede existir o no y se conoce como **forma indeterminada del tipo** $\frac{\infty}{\infty}$

La regla de Bernolli L'Hospital simplifica el cálculo de límites indeterminados del tipo $\mathbf{\frac{0}{0}}$ y $\frac{\infty}{\infty}$, utilizando el concepto de derivada. En tal sentido es una herramienta de gran potencial.

Teorema (Regla de Bernoulli L'Hospital):

H: *Sean dos funciones f(x) y g(x) que satisfacen en un cierto intervalo [a; b] las condiciones del teorema de Cauchy y se anulan simultáneamente en el punto x = a, es decir f(a)=g(a)=0; y g'(a)≠0 entonces,*

T *: si existe el límite de la razón* $\frac{f'(a)}{g'(a)}$ *cuando x→ a, existirá también el límite de* $\frac{f(a)}{g(a)}$ *cuando x→ a y ambos serán iguales.*

$$Esto\ es:\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Demostración: Se toma en el intervalo *[a,b]* un punto $x \neq a$. Figura 4.9.

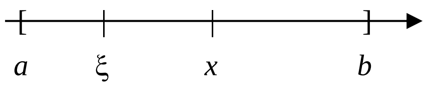


Figura 4.9

Aplicando el teorema de Cauchy al intervalo *[a; x]*, en donde *f(a) = g(a) =0*, se tiene:

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \qquad \mathbf{(1)}$$

Donde ξ está comprendido entre *a* y *x*, es decir: $\xi = a + \theta(x-a)$ con $0 < \theta < 1$

Como *f(a)* = *g(a)* = 0, la ecuación **(1)** queda:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Tomando límite para x$\rightarrow$ a:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Si $x\rightarrow a$, también $\xi\rightarrow a$, puesto que ξ es un punto intermedio entre a y x, (Figura 4.9) Luego:

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Es claro que $\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ existe y vale A, si existe $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A,$

Ya que el primero no es más que una forma particular de expresar el segundo. Entonces:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

En definitiva:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \textbf{(2)}$$

Con lo que queda demostrado el teorema.

Se puede demostrar que la regla de Bernoulli L'Hospital es aplicable también al caso $\frac{\infty}{\infty}$ cuando $x \rightarrow$ a, siempre que las funciones *f(x) y g(x)* sean continuas y derivables en un entorno del punto $x=a$ (excepto, quizás, en el punto $x=a$), que $g'(x)$ no se anule en ningún punto del mismo, que $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, y que existe el $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = A$

La demostración formal es extensa y compleja y escapa al propósito de este texto, por lo que sólo se expone una idea sencilla acerca de su validez:

Si se tiene $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ se aplica a $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{1/g(x)}{1/f(x)} = \frac{0}{0}$, caso para el que ya fue probado que es válida la expresión: $\lim_{x\to a}\frac{1/g(x)}{1/f(x)} = \lim_{x\to a}\frac{D(1/g(x))}{D(1/f(x))}$

También es válido para x $\rightarrow \infty$: $\lim_{x\to\infty}\frac{1/g(x)}{1/f(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{D(1/g(x))}{D(1/f(x))}$

Si $\boldsymbol{\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}}$ **conduce nuevamente a la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$,** y las funciones derivadas cumplen con las condiciones impuestas por el teorema de Bernoulli L'Hospital, entonces dicho teorema puede reiterarse (Así sucesivamente). Es decir:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'''(x)}{g'''(x)}=\cdots$$

El teorema puede generalizarse para el caso en que $x\to\infty$, siempre que existan: $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to\infty}\varphi(x)=0$ y $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\phi'(x)}$ ó $\lim_{x\to\infty}\frac{f''(x)}{\phi''(x)}$ ó cociente de derivadas superiores.

Resultando también en éste caso: $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}=\ldots$

Ejemplo 1: Aplicando la Regla de Bernoulli L'Hospital, determinar el $\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}=\frac{0}{0}\qquad\to\qquad \lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}\underbrace{=}_{BL'H}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$$

Queda de manifiesto la brevedad y sencillez con la que se resuelve el problema.

Ejemplo 2: Aplicando la Regla de Bernoulli L'Hospital, determinar el $\lim_{x\to 0}\frac{3tg(x)-3x}{x^3}$:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}}\frac{3\mathrm{tg(x)}-3\mathrm{x}}{\mathrm{x}^3}\underbrace{=}_{BL'H}\lim_{\mathrm{x}\to 0}\frac{\frac{3}{\cos^2(\mathrm{x})}-3}{3\mathrm{x}^2}=\lim_{\mathrm{x}\to 0}\frac{3[1-\cos^2(\mathrm{x})]}{3\mathrm{x}^2\cos^2(\mathrm{x})}=\lim_{\mathrm{x}\to 0}\left[\frac{\mathrm{sen}^2(\mathrm{x})}{\mathrm{x}^2\cos^2(\mathrm{x})}\right]=$$

$$=\lim_{\mathrm{x}\to 0}\left[\frac{\mathrm{sen}^2(\mathrm{x})}{\mathrm{x}^2}\right]*\lim_{\mathrm{x}\to 0}\left[\frac{1}{\cos^2(\mathrm{x})}\right]=1$$

Ejemplo 3: Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+9x)}{9x}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+9x)}{9x}\underbrace{=}_{BL'H}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{9}{1+9x}}{9}\underbrace{=}_{BL'H}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+9x}=1$$

Ejemplo 4: Resolver $\lim_{x\to 0}\frac{3e^x-3e^{-x}-6x}{x-senx}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3e^x-3e^{-x}-6x}{x-senx}\underbrace{=}_{BL'H}\lim_{x\to 0}\frac{3e^x+3e^{-x}-6}{1-cos\,x}\underbrace{=}_{BL'H}\lim_{x\to 0}\frac{3e^x-3e^{-x}}{senx}\underbrace{=}_{BL'H}\lim_{x\to 0}\frac{3e^x+3e^{-x}}{cos\,x}=6$$

Para resolver se derivó tres veces, ya que persistía la indeterminación $\frac{0}{0}$.

Nota 1: Si $g'(x)= 0$, pero $f'(x) \neq 0$, el teorema se puede aplicar a la razón inversa $\frac{g(a)}{f(a)}$ que tiende a cero cuando $x \to a$.

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0$$

Luego, **el resultado de** $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

Nota 2: El teorema también vale, aunque las funciones $f(x)$ *y* $\varphi(x)$ no estén definidas en $x=a$, (con lo que ni siquiera se verifica $f(a)=\varphi(a)=0$), pero se cumple:

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \;\text{ y }\; \lim_{x\to a} \varphi(x) = 0.$$

Para reducir este caso al ya visto, es necesario redefinir las funciones $f(x)$ *y* $g(x)$ de modo tal que en el punto $x=a$ resulten continuas. Para ello se recurre al concepto visto sobre discontinuidades evitables, forzando $f(a) = \lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $g(a) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, puesto que el $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ se define en un entorno reducido de $x=a$, sin importar si las funciones están o no definidas en $x=a$.

Ejemplo 5: Resolver $\lim_{x\to\infty} \frac{sen\frac{\frac{2}{5}\pi}{x}}{\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{sen\frac{\frac{2}{5}\pi}{x}}{\frac{1}{x}} \underbrace{=}_{BL'H} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{5}\pi \cos\frac{\frac{2}{5}\pi}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{2}{5}\pi$$

Ejemplo 6: $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+4}{3x^2-7} \underbrace{=}_{BL'H} \lim_{x\to\infty} \frac{10x}{6x} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

Ejemplo 7: $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{4x}}{3x} \underbrace{=}_{BL'H} \lim_{x\to\infty} \frac{4e^{4x}}{3} = \infty$

Ejemplo 8: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{tgx}{tg3x} \underbrace{=}_{BL'H} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1/\cos^2 x}{3/\cos^2 3x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 3x}{3\cos^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos 3x(-sen3x)3}{6\cos x(-senx)} =$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x} . \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{sen3x}{senx} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(-sen3x).3}{-senx} . \frac{(-1)}{1} = \frac{(-1).3}{1} . \frac{(-1)}{1} = 3$$

4.4.1– Límites indeterminados

De las siete indeterminaciones del tipo $\infty - \infty$; $0.\infty$; $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; 0^0; ∞^0; $1^{\pm\infty}$ se vio como tratar algunas de ellas con la Regla de Bernoulli L'Hospital. Los restantes casos, (∞-∞; $0.\infty$; 0^0; $+(\infty)^0$; $1^{\pm\infty}$), también pueden tratarse con la misma, **si se transforman adecuadamente en $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$**

- Forma indeterminada del tipo 0.∞:

Si $f(x) \to 0$ y $\varphi(x) \to \infty$ cuando $x \to a$, el teorema se puede aplicar a:

$$\lim_{x \to a} f(x).\varphi(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}$$

Que lo convierte el caso en el tipo $\frac{0}{0}$ ya visto.

Ejemplo: $\lim_{x \to 0} \left(3x.ln(2x)\right)$ (Indeterminación del tipo $0.\infty$)

$$\lim_{x\to 0}(3x \cdot ln(2x)) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3\,ln(2x)}{\dfrac{1}{x}}\right) \underbrace{=}_{BL'H} \lim_{x\to 0}\left(\frac{3\dfrac{2}{2x}}{-\dfrac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{3x^2}{x}\right) = 0$$

Forma indeterminada del tipo ∞ - ∞:

Para resolver aplicando la regla de Bernoulli L'Hospital, se intenta convertir la diferencia en un cociente (por ejemplo, usando un denominador común o racionalizando o factorizando un factor común) de modo de tener una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

Ejemplo: $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{3\,ln(x)}\right)$ (Indeterminación del tipo $\infty - \infty$)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{3\,ln(x)}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{3x\,ln(x) - x + 1}{3(x-1)\,ln(x)}\right) \underbrace{=}_{BL'H} \lim_{x\to 1}\left(\frac{3(x\dfrac{1}{x} + ln(x)) - 1}{3(ln(x) + \dfrac{1}{x}(x-1))}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{2 + 3\,ln(x)}{3\,ln(x) - 3\dfrac{1}{x} + 3}\right) = \pm\infty = \nexists$$

Formas indeterminadas del tipo 0^0 , ∞^0 , 1^∞

Cada uno de estos tres casos se puede tratar tomando logaritmo natural:

Sea $y = [f(x)]^{g(x)}$ entonces *ln y = g(x) . ln f(x)* o bien, al escribir la función como un exponencial: $[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$.

Cualquiera de los dos conduce al producto indeterminado *g(x) ln f(x)* que es del tipo $0.\infty$.

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to 0} x^{5x}$ (Indeterminación del tipo 0^0)

Solución: Por ser el *ln(x)* una función continua resulta *lim(ln(x))=ln(lim x)*, luego:

$$ln\left(\lim_{x\to 0} x^{5x}\right) = \lim_{x\to 0} ln(x^{5x}) = \lim_{x\to 0}(5x.ln(x)) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{5\,ln(x)}{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{5}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right) =$$

$$= -5\lim_{x\to 0} x = 0$$

Por lo tanto si: $ln\left(\lim\limits_{x\to 0} x^{5x}\right) = 0$ entonces se tiene que: $\lim\limits_{x\to 0} x^{5x} = e^0 = 1$

4.5 – Análisis de la variación de las funciones

En el Tema 1, en concordancia con las herramientas matemáticas básicas con que se contaba, se analizaron los conceptos de crecimiento y decrecimiento de las funciones, como una característica local, es decir de un entorno de un punto. Luego, estos fueron extendidos a intervalos. Incluso, en principio, se definió monotonía a partir de la variación de la función, punto por punto, siendo que ésta es una propiedad de la función, inherente a un intervalo. Pero obviamente estas y otras características no se pueden determinar calculando el valor de la función en una infinidad de puntos aislados. El propósito de estudiar este tema consiste en establecer métodos generales para analizar la variación de las funciones en intervalos.

Dada una función es importante poder determinar máximos y mínimos; zonas de crecimiento y de decrecimiento; si la curvatura gira hacia el eje *y* positivo o hacia *y* negativo (concavidad y convexidad). Es decir, en general, el estudio y análisis de la variación de las funciones.

Varias cuestiones de importancia en ingeniería se plantean en los siguientes términos: ¿Cuál es el diámetro y altura de un recipiente cilíndrico, construido con una chapa de determinada área, que tiene un volumen máximo?; Fijado el volumen, ¿qué forma deberá tener una caja para emplear la cantidad mínima de cartón en su construcción?; ¿Qué dimensiones deberá tener una viga que se extrae de un tronco de un árbol (suponiéndolo cilíndrico), para que su resistencia sea máxima: a) a la compresión, b) a la flexión?; ¿Qué forma darle a la carrocería de un automóvil para que su resistencia al aire sea mínima, sin dejar de tener en cuenta los aspectos estéticos y funcionales?

4.5.1 – Crecimiento y decrecimiento

Como lo establece el próximo teorema, derivada positiva implica función creciente, derivada negativa implica función decreciente, y derivada nula en todo un intervalo implica función constante sobre el intervalo.

Crecimiento:

Una función derivable en un entorno de x_0, es creciente en sentido amplio en x_0 si y solo si la derivada de la función en un entorno de x_0 es no negativa, es decir $f'(x) \geq 0$. (Condición necesaria y suficiente).

Decrecimiento:

Una función derivable en un entorno de x_0, es decreciente en sentido amplio en x_0 si y solo si la derivada de la función en un entorno de x_0 es no positiva, es decir $f'(x) \leq 0$. (Condición necesaria y suficiente).

Podrían enunciarse teoremas análogos para crecimiento en sentido estricto (para el que la relación sería $\boldsymbol{f'(x) > 0}$ y para decrecimiento en sentido estricto, en cuyo caso se consideraría $\boldsymbol{f'(x) < 0}$

De las ocho demostraciones posibles (cuatro teoremas, dos demostraciones para cada uno, una en cada sentido), sólo se efectuarán las dos correspondientes al primer teorema enunciado, esto es la condición necesaria y suficiente.

Demostración 1: Condición necesaria. Como hipótesis se considera que la función es derivable en un entorno de x_0 y que es creciente en sentido amplio en dicho punto. Se prueba que entonces la derivada de la función es no negativa en x_0.

Considerando el cociente incremental:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad \textbf{(1)}$$

Como la función es creciente en sentido amplio en x_0, de acuerdo a la definición, el numerador es positivo o cero si Δx es positivo, y negativo o cero si Δx es negativo (Δx suficientemente pequeño o tan pequeño como se quiera), Figura 4.10. Se dice positivo o cero porque x_0 puede estar en una zona en la que la función se estacione o presente una meseta, trata de crecimiento en sentido amplio, lo mismo para negativo o cero. Por ello se dice que es una función creciente en sentido amplio o que no decrece.

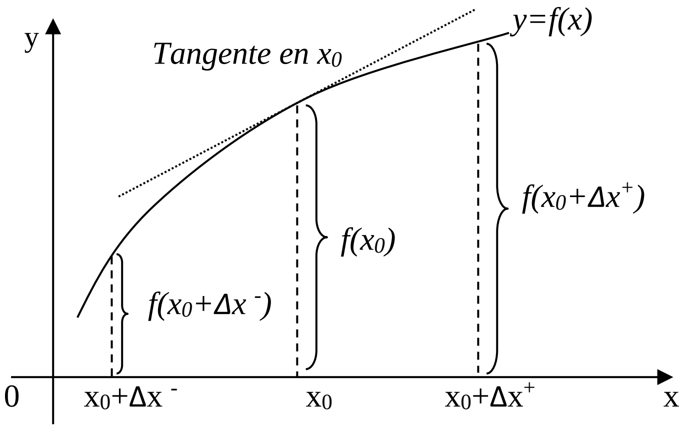


Figura 4.10

Luego: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x^+) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$ para $\Delta x > 0$ **(2)**

Lo mismo: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x^-) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$ para $\Delta x < 0$ **(3)**

En ambos casos el cociente incremental es no negativo. El límite de la **(2),** cuando x $\to x_0$, da lugar a la derivada por derecha y el límite de la **(3)**, **c**uando $x \to x_0$, a la derivada por izquierda. Como por hipótesis la función es derivable en x_0, las derivadas laterales existen y son iguales, es decir que ambos límites existen, son iguales y mayores o iguales a cero. Luego, de **(2)** y **(3)**:

$$f'^{+}(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x_0 + \Delta^+ x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'^{-}(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x_0 + \Delta^- x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$$

Que es la derivada en x_0.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'^{+}(x_0) = f'^{-}(x_0) \geq 0 \qquad \textbf{(4)}$$

Es decir, queda probado en ese caso que, la derivada es no negativa (es necesario que la derivada sea no negativa para que la función sea creciente en sentido amplio).

Demostración 2: Condición suficiente. Se toma como hipótesis que la derivada de la función en un entorno de x_0 existe y es no negativa, es decir $f'(x) \geq 0$. Se probará que en ese caso la función es creciente en sentido amplio en x_0.

Sean x_1 y x_2 dos valores cualesquiera del intervalo [a,b] con $x_1 < x_2$

De acuerdo a la definición de función creciente dada en el tema 1: $\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Por el Teorema del valor medio de Lagrange (se puede aplicar porque por hipótesis la función es derivable y por tanto contínua, como requiere el teorema):

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1)$$

Como $f'(x)$ existe, es finita, y es no negativa por hipótesis $f'(x_0) > 0$ y $x_2 - x_1 > 0$ porque $x_1 < x_2$,

$$\Rightarrow f'(x_0)(x_2 - x_1) > 0$$

por lo que: $f(x_2) - f(x_1) > 0 \quad \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ c.q.d.

Con ello queda demostrado el teorema en ambos sentidos.

De modo análogo se analiza para crecimiento en sentido estricto. Lo mismo para decrecimiento.

Observación: Estos teoremas pueden extenderse fácilmente de un punto x_0 a un intervalo [a; b]. Se toma en general crecimiento en sentido amplio para expresar la idea.

Teorema:

1) H: *Si la función f(x), derivable en el intervalo [a; b], crece en este intervalo*

T: *su derivada en él es no negativa, es decir, $f'(x) \geq 0$.*

2) H: *Si la función f(x) es continua en el intervalo [a; b] y derivable en el (a; b), cuando f´(x) es positiva para* $a<x<b$*,*

T: *f(x) es una función creciente en el intervalo [a; b].*

Las demostraciones son semejantes, salvo que para la condición suficiente se utiliza el teorema de Lagrange de allí las hipótesis utilizadas.

4.5.2 – Extremos de funciones, absolutos y relativos.

Al estudiar las propiedades de las funciones continuas, se analizó el teorema de Bolzano-Weierstrass que expresa que, para un cierto intervalo cerrado perteneciente al dominio de una función, hay un valor ***máximo absoluto M*** no superado por ningún otro, y un valor ***mínimo absoluto m*** que no supera a ninguno en el mismo.

Ello se refiere a un intervalo. Los conceptos de máximos y de mínimos que se desarrollan a continuación se refieren a condiciones locales de una función, extendidas sobre un entorno suficientemente pequeño del punto considerado. Estos extremos se denominan ***relativos***. Así, en un ***máximo relativo*** la función tiene el mayor valor, sólo en comparación con puntos suficientemente próximos, de igual modo, en un ***mínimo relativo*** la función tiene el menor valor, sólo comparados con los puntos de la función próximos a él (Δx suficientemente pequeño). Como se muestra en la Figura 4.11, para los valores x_2; x_5; x_7 y x_9 de la abscisa, la función presenta mínimos relativos (puntos C; F; H y J). En el extremo izquierdo del intervalo, $x=a$, también presenta un mínimo relativo, que en este caso es el mínimo absoluto, punto A, dado que es el menor de todos los valores que toma $y=f(x)$ en el intervalo *[a; b]*.

Para los valores de x: x_1; x_3; x_6; x_8 y b, la función toma valores máximos relativos (puntos B; D; G; I; K). Para x_8 y b la función toma el mismo valor, que no es superado por ningún otro. Luego ese máximo relativo es también el máximo absoluto.

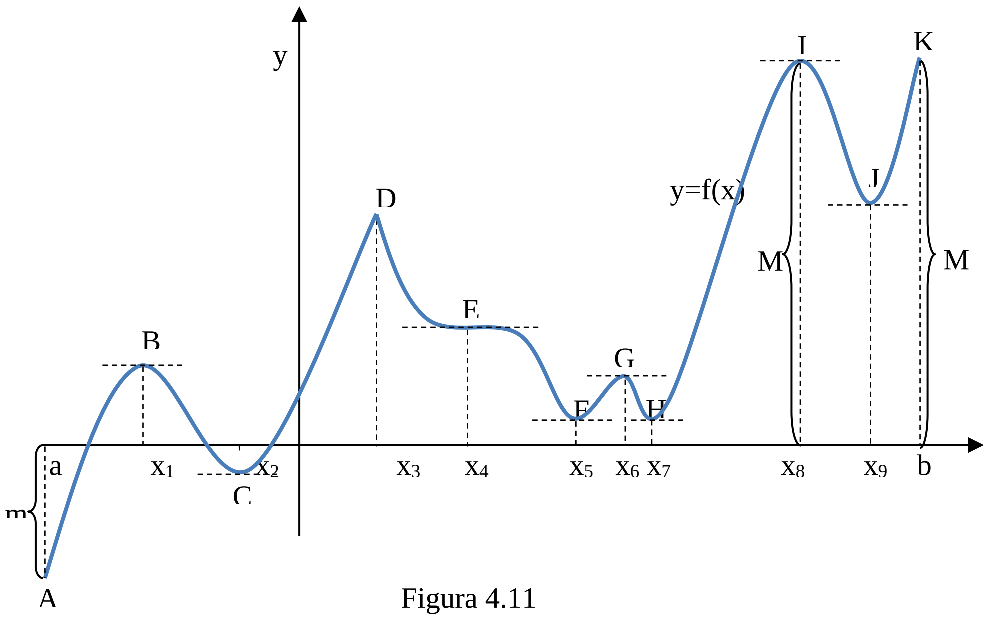


Figura 4.11

Existen funciones con mínimos relativos mayores que máximos relativos y viceversa. Por ejemplo, el mínimo que se produce en x_9 es mayor que los máximos de abscisa x_1; x_3 y x_6.

Los puntos D y E, correspondientes a los valores x_3 y x_4 de x, requieren ser considerados especialmente, puesto que en el primero la función no es derivable y en el segundo presenta un punto de inflexión a tangente horizontal. Ambas cuestiones serán examinadas en detalle, oportunamente. Obviamente, conforme a lo expresado, el mayor de los máximos relativos es el máximo absoluto y el menor de los mínimos relativos es el mínimo absoluto.

Por lo visto, cuando se trata una función en un intervalo cerrado, también debe examinarse la función en los extremos del intervalo en estudio, puesto que en ellos se presentan extremos relativos, que en particular pueden ser absolutos (extremo de punto frontera). Si los extremos del intervalo fuesen abiertos, como (a,b], (-∞,b] o [a, ∞), aunque *f(x)* sea continua no existe posibilidad de máximo y mínimo en ellos. Figura 4.12

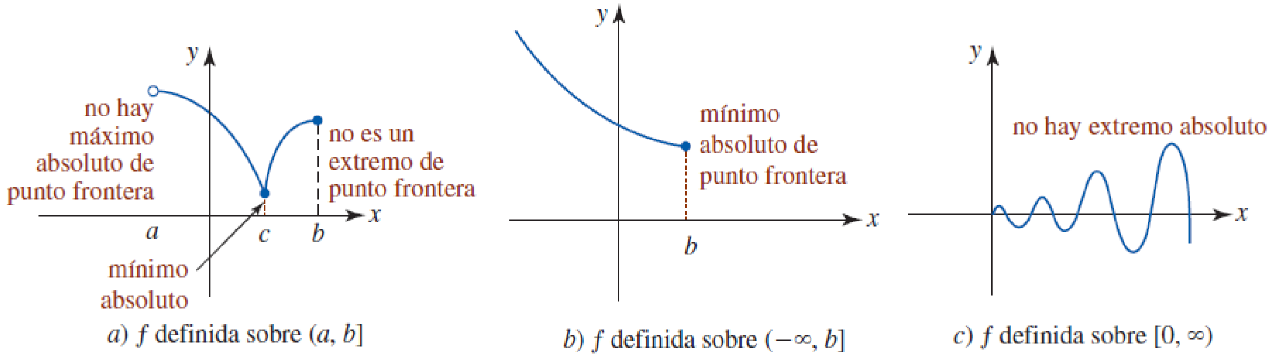


Figura 4.12

Definición de extremos:

Sea c un número en el dominio D de una función f(x). Entonces f(c) es el:

- ***Valor máximo absoluto*** *de f(x) en D si* $f(c) \geq f(x)\ \ \forall x\ \in D$

- ***Valor mínimo absoluto*** *de f(x) en D si* $f(c) \leq f(x)\ \ \forall x\ \in D$

- ***Valor máximo relativo*** *de f(x) si* $f(c) \geq f(x)$ *cuando x está cercano a c (o con* $x\ \in\ E_\delta(c)$*)*

- ***Valor mínimo relativo*** *de f(x) si* $f(c) \leq f(x)$ *cuando x está cercano a c (o con* $x\ \in\ E_\delta(c)$*)*

En adelante al hablar de máximo y mínimo se hace referencia a los extremos ***relativos*** y se aclarará cuando se trate de extremos absolutos.

Parte de la importancia de ubicar los extremos radica en que ellos determinan intervalos de crecimiento y de decrecimiento de una función. Como se verá, los llamados puntos de inflexión determinan intervalos de concavidad y convexidad.

Ejemplo: La gráfica de la función $f(x) = 3\,x^4 - 16x^3 + 18\,x^2$, en $-1 \le x \le 4$, se muestra en la figura 4.13.

En ella puede verse que *f(1) = 5* es un máximo local, en tanto que el máximo absoluto es *f(-1) = 37*, (este máximo absoluto no es un máximo local porque se presenta en un punto extremo). Así mismo *f(0) = 0* es un mínimo local y *f(3) = -27* es un mínimo tanto local como absoluto. Advierta que *f(x)* no tiene valor máximo local ni máximo absoluto en *x = 4*.

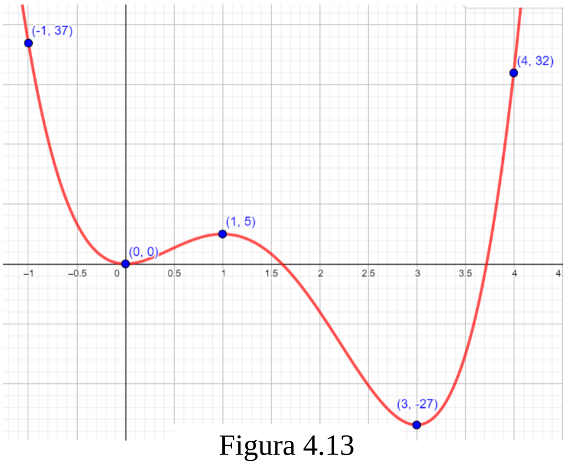


Figura 4.13

4.5.3 – Condición necesaria para la existencia de extremo en funciones derivables

Geométricamente, el valor que toma la derivada en el punto $x = x_0$ es el de la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$, en el punto de coordenadas $(x_0; y_0)$; entonces es evidente que en un máximo o un mínimo de una curva que representa gráficamente a una función derivable, la tangente a la misma debe ser horizontal; es decir, su pendiente cero.

Así, se concluye que la condición necesaria que debe cumplir una función derivable, para que presente extremo en un punto x_0 es que en él se anule su derivada $f'(x_0) = 0$

La condición $f'(x_0) = 0$, que geométricamente significa que la tangente es horizontal, es necesaria, pero no suficiente.

Ello quiere decir que, si la función es derivable en un entorno de un punto y presenta extremo en él, entonces su derivada es nula en el mismo. La recíproca puede no ser cierta, esto es, una función puede tener derivada nula en un punto y no presentar extremo en él.

En la Figura 4.11, la tangente a la curva es horizontal en los puntos B; C; E; F; G; H; I y J. En ellos la función presenta extremos, salvo en el punto E, que, como se verá, es un punto de inflexión.

Ejemplo 5: Graficar la función $y = x^3$.

La derivada de la función es $y' = 3x^2$, que en el punto $x=0$, es $y'(0) = 0$

Ello implica que la tangente a la curva en dicho punto es horizontal, no obstante ello, no presenta máximo ni mínimo, sino un punto de inflexión, que será definido y estudiado más adelante en este tema.

La función es estrictamente creciente en $x = 0$.

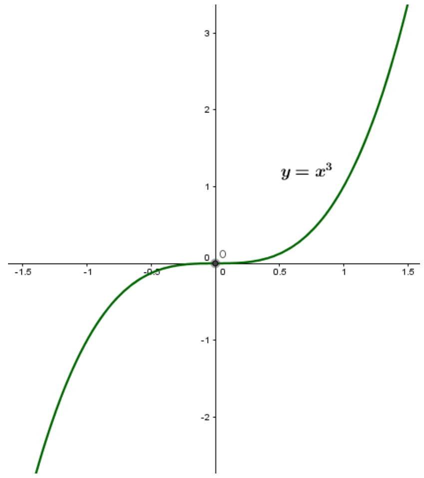


Figura 4.14

Condición necesaria para la existencia de Extremos

La condición necesaria para la existencia de extremos tiene su expresión formal en el siguiente teorema, llamado Teorema de Fermat:

Teorema de Fermat:

H) *Si la función f(x), derivable en x_0 (es decir admite derivada finita en x_0), presenta extremo en dicho punto;*

T) *Entonces la derivada es nula en él.*

Demostración:

Se supone que en $x = x_0$ la función tiene un máximo relativo, ver figura 4.15.

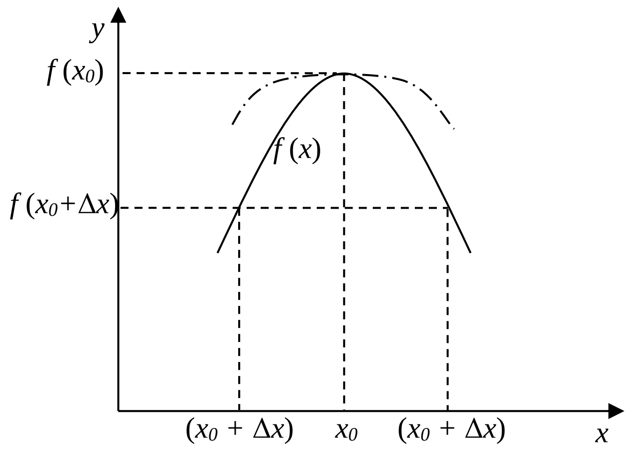


Figura 4.15

Entonces para $\Delta x \neq 0$, suficientemente pequeño, se cumple:

$f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0)$ ya sea $\Delta x < 0$ o bien $\Delta x > 0$.

Se expresa que $f(x_0 + \Delta x)$ es menor o igual que $f(x_0)$ porque el máximo en consideración puede tener la característica que se muestra en la función de punto y trazo de la

Figura 4.15, en cuyo caso al variar *x* en Δx, suficientemente pequeño, se mantiene el valor de la función, es decir resulta $f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$ en lugar de $f(x_0+\Delta x)<f(x_0)$.

Luego, el signo del cociente incremental lo determina el signo de Δx :

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\leq 0 \quad ; \qquad \text{Con } \Delta x > 0$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\geq 0 \quad ; \qquad \text{Con } \Delta x < 0$$

Conforme a la definición de derivada se tiene:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Como la función es derivable en $x = x_0$, este límite no depende de la forma en que Δx tienda a cero (positivo o negativo).

Si $\Delta x < 0$ permaneciendo negativo resulta $f'(x_0)\geq 0$

Si $\Delta x > 0$ permaneciendo positiva resulta $f'(x_0)\leq 0$

Puesto que $f'(x_0)$ es un número determinado que no depende de la manera en que Δx tienda a cero, las dos últimas desigualdades son compatibles sólo cuando: $f'(x_0)=0$

Con ello queda demostrado el teorema. De la misma forma se demuestra el teorema si se supone que en x_0 la función presenta un mínimo.

Caso en que la función no es derivable en algunos puntos:

a) En la Figura 4.11 debe considerarse en particular el punto D de abscisa x_3, en el que la función presenta un máximo, pero no es derivable en el mismo.

b) Un ejemplo representativo de este caso es la función $y=|x|$ cuya grafica se presenta en la Figura 4.16.

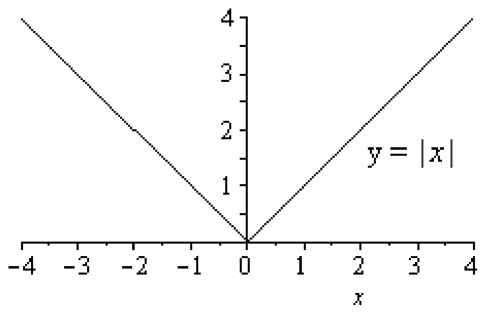


Figura 4.16

En $x = 0$ la función valor absoluto, $y=|x|$, no es derivable (en este punto la curva no tiene tangente única); pero la función presenta un mínimo en él, (es un mínimo absoluto).

c) La función $y = \sqrt[3]{x}$ no posee derivada finita en $x = 0$, puesto que $f'(x)$ tiende a $+\infty$ cuando x tiende a cero por derecha o por izquierda.

En este punto la función no tiene derivada finita, es decir el punto es crítico, no obstante, la función no presenta ni máximo ni mínimo en él. Ver Figura 4.17.

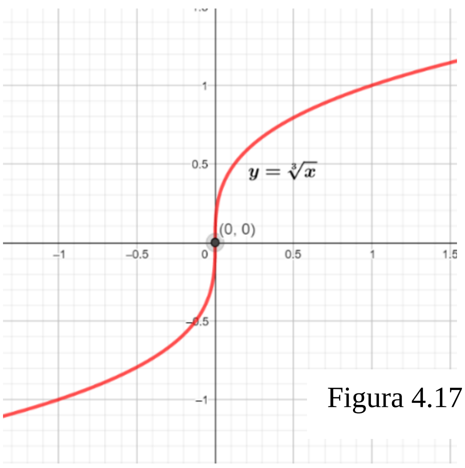


Figura 4.17

Del análisis realizado se deduce que:

Dada una función los únicos puntos en los que podría existir extremo, son aquellos en los que la derivada es nula o no existe: A este tipo de puntos se los denomina críticos.

4.5.4 – Puntos críticos

Definición: Punto Crítico

Se denominan puntos críticos o valores críticos a aquellos valores de x pertenecientes al dominio de la función, para los que la derivada $f'(x)$ es cero o no existe:

$$f'(x) = 0 \text{ ó } f'(x)\nexists$$

En ellos, puede o no haber extremo (máximo o mínimo), según se ha visto, pero si la función presenta extremos, será únicamente en uno o más de estos puntos.

En general, con punto crítico se indicará el valor de la abscisa (x) del punto en el que la función podría presentar extremo. En lo sucesivo cuando se exprese “entorno suficientemente chico o suficientemente pequeño, de un punto crítico” se entiende que debe ser suficientemente pequeño como para no contener otro punto crítico.

Ejemplo: Encontrar los puntos críticos de $f(x) = x.\ln x$

La derivada de *f*(*x*) es:

$$f'(x) = x.\frac{1}{x} + \ln x = 1 + \ln x$$

Aplicando la condición necesaria, *f'(x) = 0* se obtiene el punto crítico.

$$1 + \ln x = 0$$

$\boldsymbol{x = e^{-1} = 0,37}$ $\boxed{\textit{Valor de abscisa crítico}}$

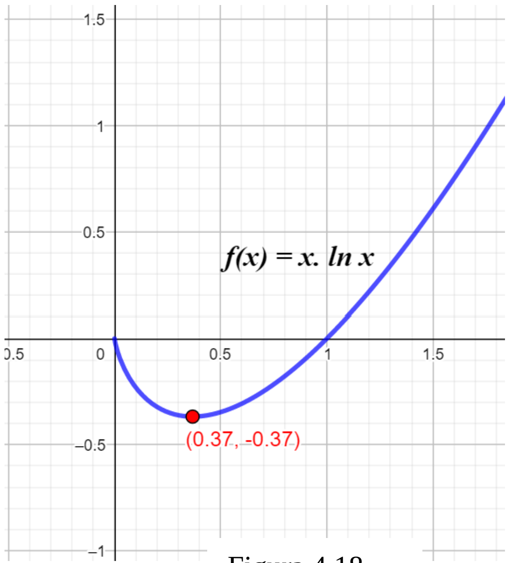


Figura 4.18

Punto crítico: P(0,37, f(0,37))

P(0,37, -0,37)

Ejemplo: Encontrar los puntos críticos de $f(x) = 3x^4 + 4\,x^3 - 12\,x^2 + 10$

La derivada de *f*(*x*) es:

$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x$

Aplicando la condición necesaria, *f'(x) = 0* se obtiene el punto crítico.

$12x(x+2)(x-1) = 0$

x = 0 , x = -2 , x = 1 $\boxed{\textit{Valores de abscisas críticos}}$

Puntos críticos: $P_1(0, f(0))$ = $\mathbf{P_1(0, 10)}$

$P_2(-2, f(-2))$ = $\mathbf{P_1(-2, -22)}$

$P_3(1, f(1))$ = $\mathbf{P_1(1, 5)}$

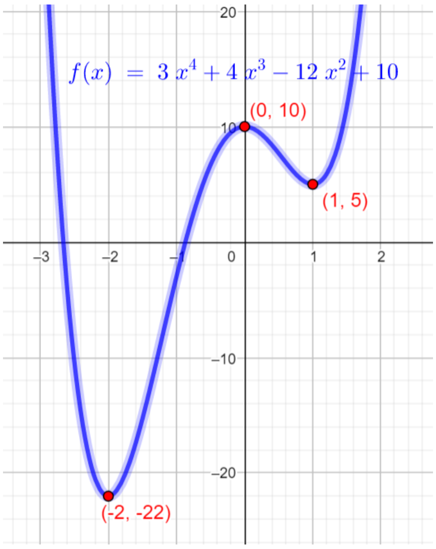


Figura 4.19

Ejemplo: Encontrar los puntos críticos de $f(x) = (x+4)^{2/3}$

La derivada de *f*(*x*) es:

$f'(x) = \frac{2}{3}\,(x+4)^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x+4}}$

Aplicando la condición necesaria, ***f'(x) no existe cuando x = -4*** , como x = -4 está en el dominio de *f(x)* se concluye que es un valor crítico.

x= -4 $\boxed{\textit{Valor de abscisa crítico}}$

Punto crítico: P(-4, f(-4))

P(-4, 0)

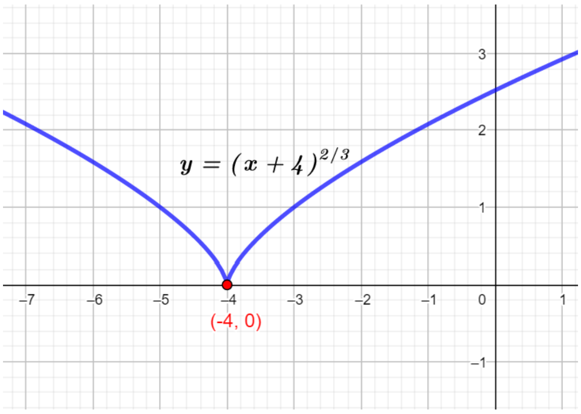


Figura 4.20

El procedimiento que se emplea habitualmente para encontrar los valores extremos de una función es: Primero se determinan los puntos críticos, aplicando la condición necesaria y después se analiza la función para cada uno de ellos en particular.

4.5.5 – Condición suficiente para la existencia de extremos

Teorema:

***H)** Sea la función y=f(x) continua en un entorno al que pertenece el punto crítico x_0 y derivable en todos los puntos del mismo, excepto, tal vez, en x_0.*

***T)** Entonces si el signo de la derivada primera:*

a) cambia de positivo a negativo al pasar por el punto x_0 de izquierda a derecha, en el mismo la función presenta un máximo.

b) Si cambia de negativo a positivo existe un mínimo en x_0.

Si bien el teorema puede probarse formalmente, basta con observar, según lo visto, que donde $f\,'(x)>0$ la función es creciente y donde es $f'(x)<0$ es decreciente, luego en el punto x_0 la función presenta un máximo, dado que a la izquierda de él es creciente y a la derecha decreciente. De modo similar para el mínimo.

Este teorema da lugar al denominado método de la derivada primera para determinar el tipo de extremo.

4.6 – Análisis general de la Variación de las funciones

El estudio de la variación de una función $y = f(x)$, incluye la determinación de zonas de crecimiento, de decrecimiento, de concavidad, de convexidad; máximos y mínimos y puntos de inflexión. Lo que permite establecer con cierta precisión, como varía la función.

4.6.1 – Relación entre extremos e intervalos de crecimiento y de decrecimiento

Los puntos de valores extremos separan los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de una función. Con lo que una de las maneras de encontrar dichos intervalos es, una vez determinados los puntos críticos obtener los intervalos de crecimiento y de decrecimiento mediante el estudio del signo de la derivada primera y, sobre esta base, determinar extremos sabiendo que entre un intervalo de crecimiento y uno de decrecimiento existe un máximo y entre uno de decrecimiento y uno de crecimiento, un mínimo.

Ejemplo: Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función dada por $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2\,x^2 + 3x + 1$ y los extremos.

Para resolver se determinan los puntos críticos.

$f'(x) = x^2 - 4x + 3$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$\boldsymbol{x_1 = 1}$ **;** $\boldsymbol{x_2 = 3}$**.** $\boxed{\textit{\textbf{Valores de abscisas críticos}}}$

Para determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento se analiza el signo de la derivada primera en los intervalos de la escala numérica, determinados por los valores de los puntos críticos, que particionan el dominio de la función. Es importante utilizar los puntos de discontinuidad para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento (y también de concavidad y convexidad).

Ellos son**: (-∞; 1); (1; 3); (3; +∞).**

Con el fin de determinar el signo de la derivada primera en cada uno de los intervalos indicados, se toma un valor cualquiera perteneciente al intervalo, para el que la derivada primera resulte sencilla de evaluar, por ejemplo x=0 en el (-∞; 1).

intervalos	**f'(x)**	**La función en el intervalo es**
(-∞, 1)	f'(0)=3 > 0	Es creciente
(1,3)	f'(2)= -1 < 0	Es decreciente
(3, ∞)	f'(4) = 3 > 0	Es creciente

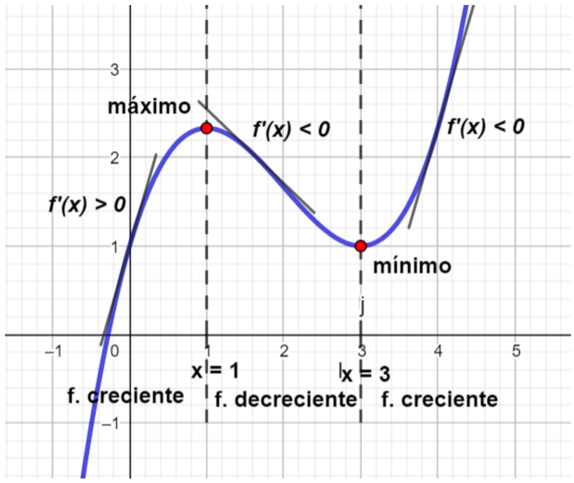


Figura 4.21

Como la función es creciente en (-∞; 1) y decreciente en (1; 3), **en x=1 presenta un máximo**. Como decrece en (1; 3) y crece en (3; +∞), **en x=3 tiene un mínimo**.

4.6.2 – Determinación de máximos y mínimos.

Para buscar los máximos y los mínimos de una función *f(x)* se comienza por hallar los puntos críticos, es decir los valores de x donde la derivada primera se anula o no existe:

$f\,'(x_c) = 0$ ó bien $f\,'(x_c)$ no exista.

Para determinar si en los puntos críticos hay extremo y de qué clase, se dispone de dos criterios:

1. Criterio de la derivada primera.

2. Criterio de la derivada segunda, <u>cuando ésta exista.</u>

Criterio de la derivada primera:

a) Si en un punto crítico la derivada primera de la función cambia de signo, de positivo a negativo, al pasar por el punto de izquierda a derecha, la función presenta un máximo relativo.

b) Si la función presenta un mínimo en un punto crítico, la derivada de la función pasa de negativa la izquierda del punto, a positiva la derecha del mismo.

A continuación, se analiza gráficamente este concepto.

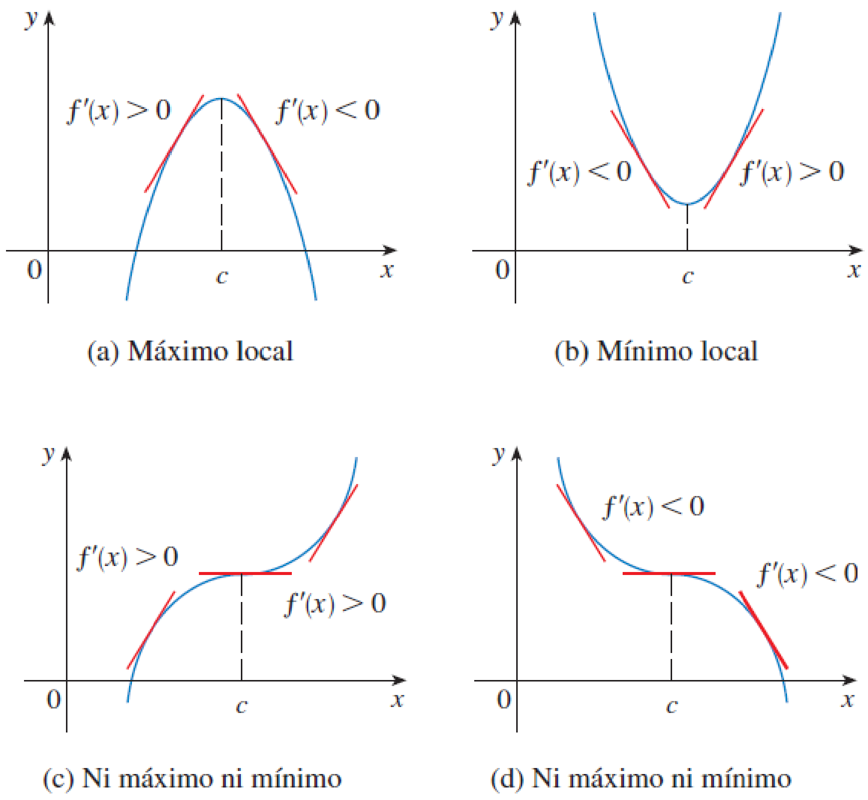


Figura 4.22

Analizando la Figura 4.23, la cual presenta graficadas en forma superpuesta la *f(x)* y su primera y segunda derivada, se tienen dos puntos críticos, $x = b$, $x = e$. En el punto B la tangente a la curva $y= f(x)$ es horizontal, luego su pendiente es nula y en consecuencia $f´(x)=0$. Ello en concordancia con el hecho que la gráfica de $f´(x)$ corta al eje x en el punto de abscisa x=b, es decir la ordenada de la derivada primera es nula en dicho punto.

En cualquier punto del arco que va de A a B, la recta tangente a la curva $y= f(x)$ tiene una inclinación mayor que 0 y menor que π/2, esto es, su pendiente es positiva, por tanto, $f´(x)>0$. Mientras que en cualquier punto de B a E, la recta tangente a la curva $y= f(x)$, posee una inclinación mayor que π/2 y menor que π , lo que implica pendiente negativa. Luego $f´(x)<0$.

En conclusión: Gráficamente observamos que cuando una función presenta un máximo en un punto, por ejemplo, de abscisa *x*=b (punto B), para valores de *x* suficientemente próximos a *x*=b, la derivada primera a la izquierda es positiva y a la derecha negativa.

Con análisis similar, observando la figura, se concluye que la función presenta un mínimo en el punto E, de abscisa *x*= e, con recta tangente horizontal, y que, a su izquierda, para puntos suficientemente cercanos al E, las rectas tangentes poseen pendientes negativas y a la derecha pendientes positivas.

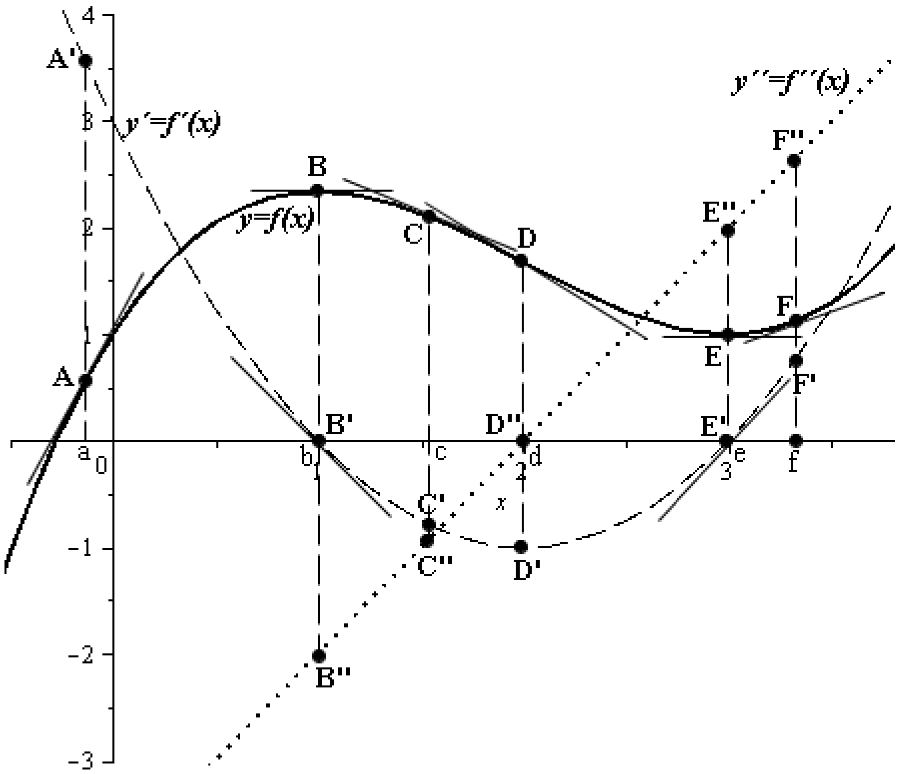


Figura 4.23

Criterio de la derivada segunda

Si la función es derivable al menos hasta el segundo orden en un punto crítico x = c

a) Si f'(c) = 0 y f''(c) < 0 , la función presenta un máximo relativo en x = c.

b) Si f'(c) = 0 y f''(c) > 0 la función presenta un mínimo relativo en x = c.

Para ver la vinculación entre la derivada segunda de una función y los extremos relativos, se analiza la Figura 4.23.

En la Figura 4.23 se observa que se presenta un máximo relativo en el punto B de abscisa *x*= b. Este es un punto crítico de derivada nula. En él, la función es derivable, es decir que existe *y´= f ´(x)* en un entorno del mismo, que es derivable a su vez en *x*=b. Esto es, existe *y´´= f ´´(b).*

Como la *gráfica de la función derivada primera en las cercanías del punto de abscisa b (máximo) es decreciente*, la recta tangente a la curva $y' = f'(x)$ en el punto B´ tiene pendiente negativa (valor del punto B´´ sobre la gráfica de $y'' = f''(x)$). La derivada segunda, en este caso, es negativa, entonces la $f'(x)$ es decreciente en $x = b$. Como $f'(b) = 0$, al pasar por b, cambia de signo de positivo a negativo y por el criterio de la derivada primera implica que en b, la función presenta un máximo relativo.

De igual modo, para el punto E, de abscisa x=e, la función presenta un mínimo, la derivada primera es creciente y la derivada segunda tiene un valor positivo, dado por el segmento E´E´´. Si la derivada segunda es positiva, la función derivada primera, $f'(x)$, es creciente en un entorno del punto $x = e$. Por lo tanto el signo de ésta cambia de negativo a positivo, al pasar por *e* de izquierda a derecha, dado que éste es punto crítico por ser $f'(e)=0$. Ello implica, conforme al criterio de la derivada primera, que la función *f(x)* presenta un mínimo relativo en el punto en cuestión.

Ejemplo: Determinar máximos y mínimos de la función $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 6x$

I) Encontrar la primera derivada: $y' = x^2 + x - 6$

II) Aplicar condición necesaria: encontrar las raíces de dicha derivada y'

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \ ; \ x_1 = -3 \ ; \ x_2 = 2$$

III) Por ser la función derivada continua, no existen otros puntos críticos.

IV) Análisis del signo de la derivada al pasar por los puntos críticos. Criterio de la primera derivada.

intervalos	**f'(x)**	**La función en el intervalo es**
(-∞, -3)	f'(-4)=10 > 0	Es creciente
(-3,2)	f'(0)= -6 < 0	Es decreciente
(2, ∞)	f'(3) = 6 > 0	Es creciente

x = -3 la derivada, al pasar cambia de + a - ➡ En x = -3 f(x) tiene un máximo

x = 2 la derivada, al pasar cambia de - a + ➡ En x = 2 f(x) tiene un mínimo

Punto máximo P(-3,f(-3)) = (-3, 13,5)

Punto mínimo P(2,f(2)) = (2, -7,33)

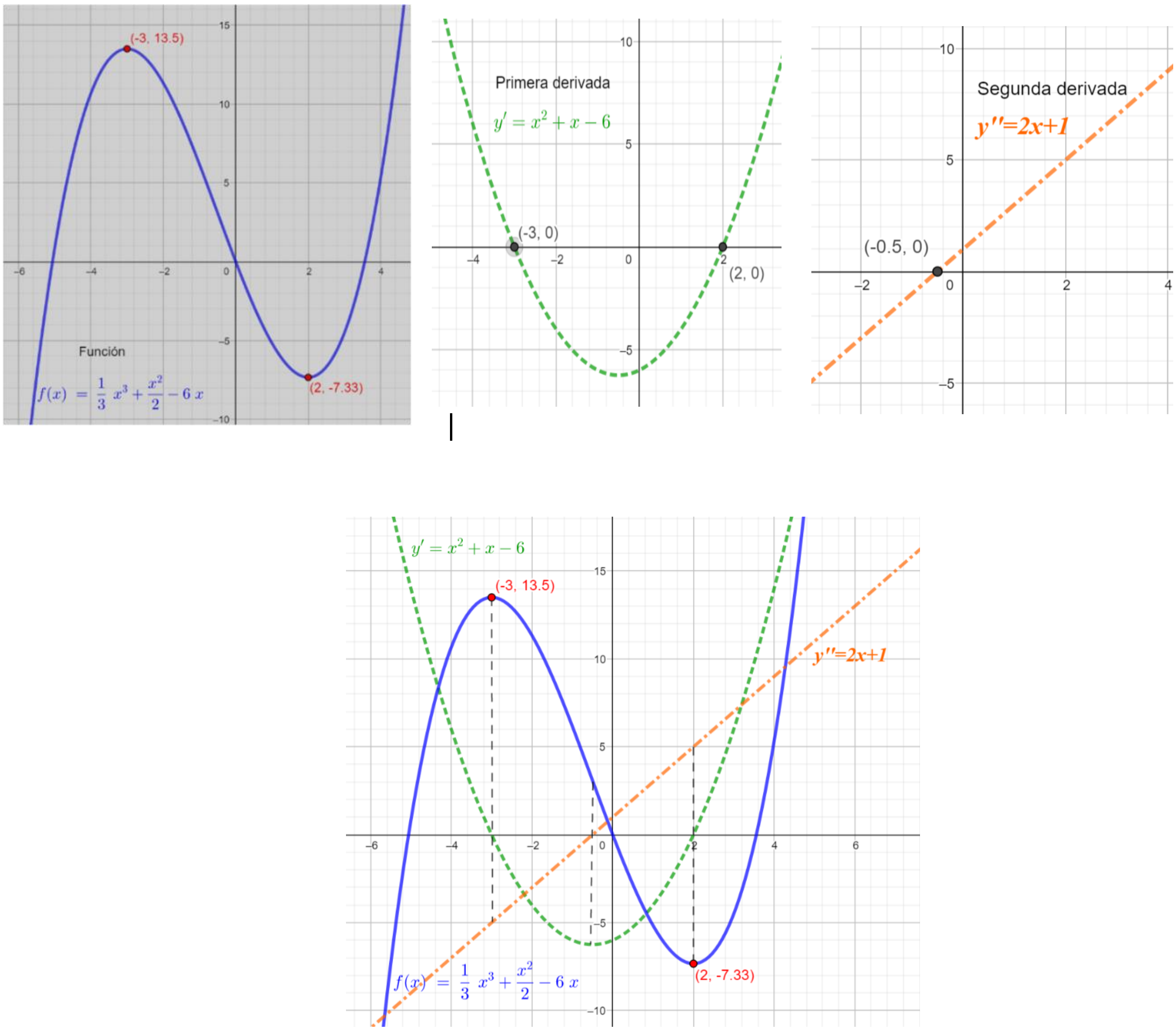


Figura 4.24

V) Análisis por el criterio de la segunda derivada $f''(x) = 2x + 1$

$f''(-3) = 2.(-3) + 1 = -5 < 0$ en x = -3 hay un punto máximo.

$f''(2) = 2.(2) + 1 = 5 > 0$ en x = 2 hay un punto mínimo.

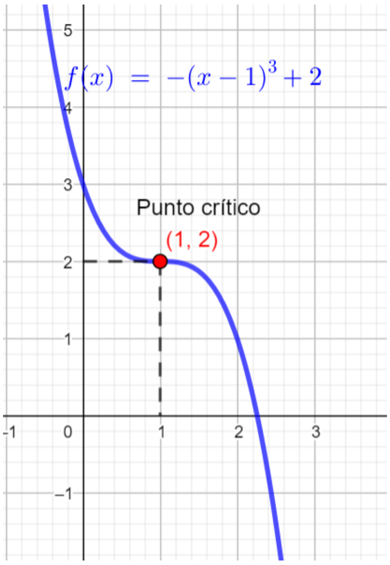
Ejemplo: Sea la función $y = -(x-1)^3 + 2$ analizar la variación de la misma.

$y' = -3\,(x-1)^2$

Puntos críticos: $-3(x-1)^2 = 0$

Existe un solo punto crítico *x*=1, definiendo dos intervalos: (-∞; 1) y (1; +∞).

intervalos	f'(x)	La función en el intervalo es
(-∞, 1)	f'(0)=-3 < 0	Es decreciente
(1, ∞)	f'(2) = -3 < 0	Es decreciente

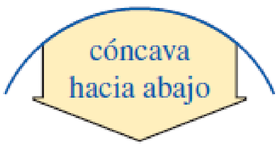


Como $(x-1)^2$ al estar elevado al cuadrado es positivo ya sea x <1 o x >1, $-(x-1)^2$ es negativo, en cualquier caso. Es decir, la derivada primera pasa de negativo a negativo, luego la función en $x=1$ no presenta extremo sino que es decreciente (Figura 4.25). La función es decreciente en su dominio (-∞; +∞).

4.7 – Concavidad, convexidad y puntos de inflexión

En la Figura 4.26 se muestra una idea intuitiva del significado de concavidad hacia arriba (concavidad) y concavidad hacia abajo (o convexidad).

a) "Contiene agua"



b) "Derrama agua"

Figura 4.26

Definición:

Sea f(x) una función derivable sobre el intervalo (a,b):

a) Si su derivada primera f'(x) es una función creciente sobre (a,b), entonces la gráfica de f(x) es cóncava hacia arriba en el intervalo.

b) Si su derivada f'(x) es una función decreciente sobre (a,b), entonces la gráfica de f(x) es cóncava hacia abajo (convexa) en el intervalo.

En otras palabras, si las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de *f(x)* crecen cuando x crece sobre (a, b), entonces la gráfica de *f(x)* es cóncava hacia arriba sobre el intervalo. Si las pendientes crecen cuando x crece, entonces esto significa que las rectas tangentes giran en sentido contrario al de las manecillas del reloj sobre el intervalo.

La gráfica de una función *f(x)* es cóncava hacia arriba sobre un intervalo si la gráfica en cualquier punto se encuentra por arriba de las rectas tangentes.

En otras palabras, si las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de *f(x)* decrecen cuando *x* crece sobre (a, b), entonces la gráfica de *f(x)* es convexa (o también cóncava hacia abajo) sobre el intervalo. Si las pendientes decrecen cuando *x* crece, entonces esto significa que las rectas tangentes giran en sentido de las manecillas del reloj sobre el intervalo.

La gráfica de una función *f(x)* es cóncava hacia abajo sobre un intervalo si la gráfica en cualquier punto se encuentra por abajo de las rectas tangentes. Figura 4.27.

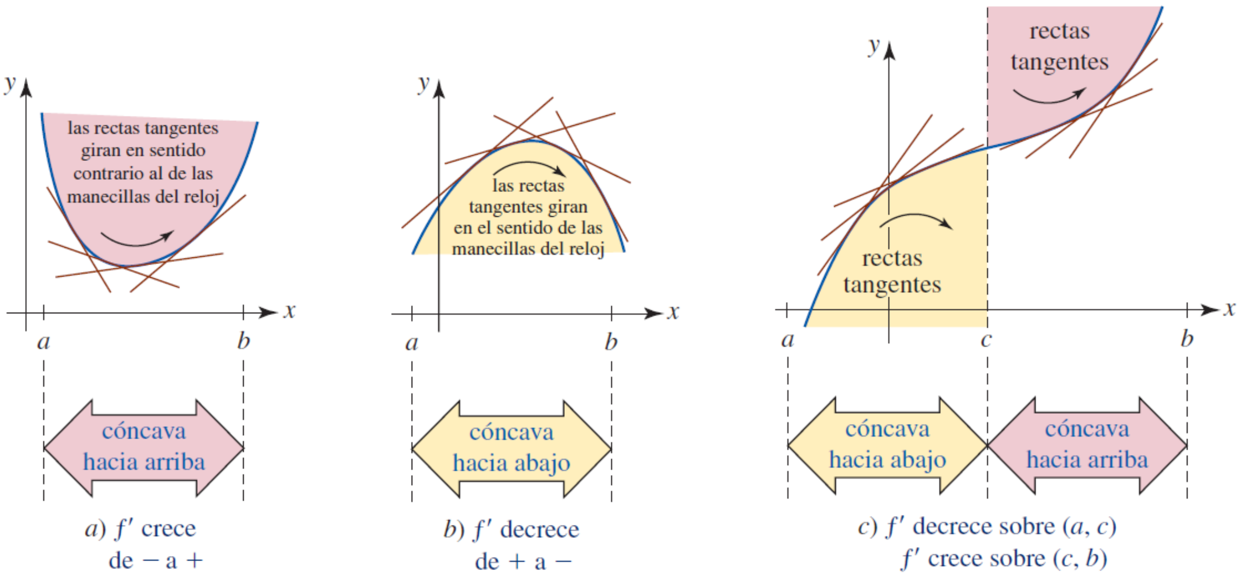


Figura 4.27

Como $f\,'(x_0)$ es el valor de la pendiente de la recta tangente en un punto x_0, pendiente creciente significa que la función derivada $f\,'(x)$ debe ser creciente. Luego la derivada de ésta, debe ser positiva. Es decir, $f\,''(x) > 0$ (se habla de crecimiento en sentido estricto.

En definitiva, con la interpretación gráfica realizada:

$$f\,''(x) > 0 \text{ en } (a;\, b) \Rightarrow f(x) \text{ es cóncava en } (a;\, b).$$

Esto es: la función es cóncava en el intervalo en el que la derivada segunda es positiva

Con la interpretación gráfica realizada:

$$f\,''(x) < 0 \text{ en } (a;\, b) \Rightarrow f(x) \text{ es convexa en } (a;\, b).$$

Nota: Para analizar los intervalos de concavidad y convexidad se debe separar el dominio en los puntos que anulan la derivada segunda (que como se verá son posibles puntos de inflexión). Además, se deben tener en cuenta los puntos de discontinuidad no porque sean puntos de inflexión si no porque la curvatura puede ser distinta a los lados de los mismos.

Punto de inflexión

Definición:

Se denomina punto de inflexión a todo punto de la curva en el cual ésta cambia el sentido de su curvatura. En él, pasa de cóncava a convexa o viceversa. Ello implica que la derivada segunda cambia de signo al pasar por el punto.

Teorema:

H: *Sea una función $y = f(x)$. Si x_0 es un punto del dominio de $f(x)$ tal que la derivada segunda $f''(x_0) = 0$ o no existe y además cambia de signo al pasar por x_0, entonces*

T: *el punto de abscisa x_0 es un punto de inflexión.*

Discusión: **1)** Sea $f''(x) < 0$ si $x < x_0$

$f''(x) > 0$ si $x > x_0$

En este caso, a la izquierda de x_0 la función es convexa y a la derecha cóncava. Luego, x_0 es abscisa de un punto de inflexión.

2) Sea $f''(x) > 0$ si $x < x_0$

$f''(x) < 0$ si $x > x_0$

Luego, en este caso, a la izquierda de x_0 la función es cóncava y a la derecha convexa. Entonces, x_0 es abscisa de un punto de inflexión.

Ejemplos gráficos de puntos de inflexión:

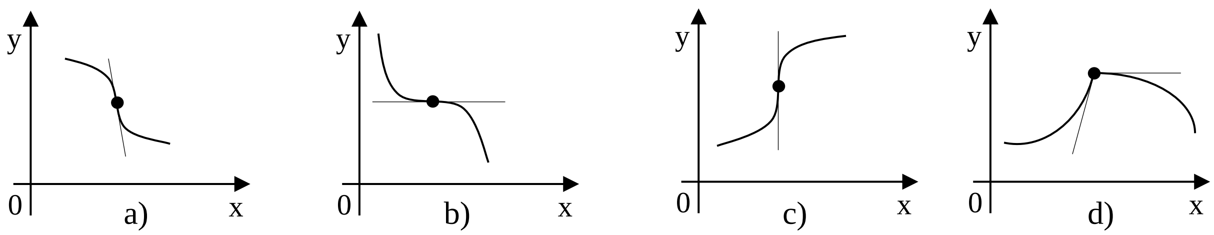


Figura 4.28

Si se analiza la figura 4.28 puede observarse:

a) Presenta un punto de inflexión que separa un intervalo de convexidad, a la izquierda, de uno de concavidad, a la derecha. En el punto la función es derivable, con derivada primera no nula (negativa), derivada segunda nula y la tangente atraviesa la curva. La función es estrictamente decreciente en todos los puntos.

b) Muestra un punto de inflexión que separa un intervalo de concavidad a la izquierda de uno de convexidad a la derecha. En el punto la función es derivable, con derivada primera y segunda nula y la tangente que atraviesa la curva es horizontal. (Punto de inflexión a tangente horizontal).

c) Presenta un punto de inflexión que separa un intervalo de concavidad a la izquierda, de uno de convexidad a la derecha. En el punto la derivada primera es +∞. La derivada segunda no existe en él, puesto que allí la función derivada primera presenta una discontinuidad. La tangente que atraviesa a la curva es vertical.

d) Exhibe un punto de inflexión que separa un intervalo de concavidad a la izquierda, de uno de convexidad a la derecha. En el punto la función no es derivable, no existe tangente única y obviamente no existe derivada segunda.

Ejemplo: Dada la función $y = 2x^3 + x - 9$, determinar los puntos de inflexión y en consecuencia los intervalos de concavidad y convexidad.

Para encontrar los posibles puntos de inflexión, se debe determinar la derivada segunda de la función:

$$y' = 6x^2 + 1 \quad ; \quad y'' = 12x \quad ; \quad y''(0) = 0$$

La derivada segunda se anula para $x = 0$. Ello determina los intervalos (-∞; 0) y (0; +∞). Luego, en cero la función puede presentar un punto de inflexión. Se examina el comportamiento de la curva que representa a la función, indagando el signo de la derivada segunda en ambos intervalos.

En (-∞; 0), es $x < 0$, luego $y'' = 12x < 0$, por lo tanto la función es convexa.

En (0; +∞), es $x > 0$, luego $y'' = 12x > 0$, por lo tanto la función es cóncava.

Entonces como la derivada segunda cambia de signo al pasar de uno a otro lado del punto, en $x=0$ la función presenta un punto de inflexión, que, desde luego, separa los intervalos de convexidad y concavidad. Ver Figura 4.29.

Las coordenadas del punto de inflexión P_i son $f(0)$= -9, luego P_i(0; -9)

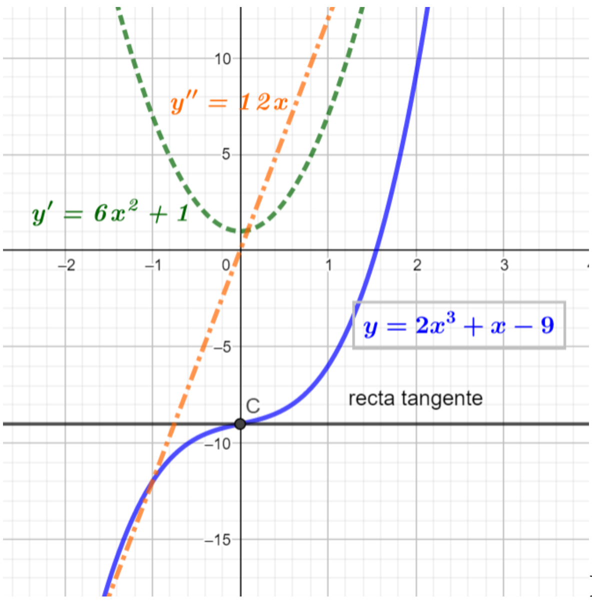


Figura 4.29

4.8 – PROBLEMAS DE APLICACIÓN:

Ejemplo: El llamado tiro parabólico el alcance de un proyectil arrojado en el vacío, por una pieza determinada de artillería, con una velocidad inicial v_0, depende del ángulo de elevación φ con respecto a la horizontal. Se calculará qué valor debe tener dicho ángulo para que el alcance sea máximo.

Llamando g a la aceleración gravitacional terrestre, la distancia r que recorre el proyectil se estudia en Física y viene dada por la expresión:

$$r = \frac{{v_0}^2 .sen(2\varphi)}{g}$$

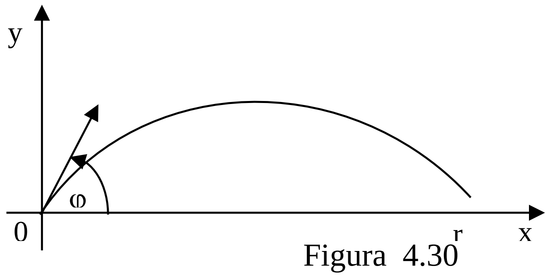


Figura 4.30

El dominio de φ es $[0; \frac{\pi}{2}]$. Se determinan los puntos críticos, para lo cual se deriva la expresión anterior.

$$r' = \frac{v_0^2}{g}\, 2cos2\varphi.\ La\ cual\ se\ anula\ para\ \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$r'' = -\frac{{v_0}^2}{g} 4sen2\varphi.\ \text{Quetiene signo negativo para}\ \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Entonces para $\varphi = \frac{\pi}{4}$, el alcance es máximo.

Ejemplo: Se desea construir un recipiente de forma cilíndrica, de volumen prefijado V, que guarde una relación tal, entre diámetro y altura, que el área del material utilizado sea mínima.

El área del cilindro está dada por $A = 2\pi R^2 + 2\pi R h.$ **(1)**

Por otro lado, el volumen es: $V = \pi R^2 h.$ Por lo tanto $h = \frac{V}{\pi R^2}.$ **(2)**

Reemplazando **(2)** en **(1)**, resulta: $A = 2\left[\pi R^2 + \frac{\pi R V}{\pi R^2}\right] = 2\left[\pi R^2 + \frac{V}{R}\right].$

Derivando: $A'_R = 2\left[2\pi R - \frac{V}{R^2}\right]$, Se anula en: $2\pi R = \frac{V}{R^2}$.

Luego $R^3 = \frac{V}{2\pi}$, es decir: $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$

Si se toma V=1 litro= 1000 cm^3, resulta $R_{min} = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\dfrac{1000}{2\pi}} = 5{,}4192$.

Se trata de un mínimo, pues su derivada segunda es >0, para todo valor de R positivo.

Conociendo R, de la expresión (2) se obtiene el valor de h.

$$h = \frac{1}{\pi(5{,}4192)^2} = 10{,}8387$$

Se puede realizar la siguiente verificación:

$$V = 3{,}141592(5{,}4192)^2 .10{,}8387 = 999{,}998671 cm^3.$$

Es decir que un tarro cilíndrico recto, de aproximadamente 10,84 cm de diámetro y 10,84 cm de altura tendrá una capacidad muy próxima a un litro, con un área mínima de hojalata. Se cumple así el propósito de diseñar un envase cilíndrico, de capacidad 1 litro, utilizando la mínima cantidad de material para su construcción.

Ejemplo: Con un cartón cuadrado, de lado *a*, confeccionar una caja de base cuadrada de volumen máximo.

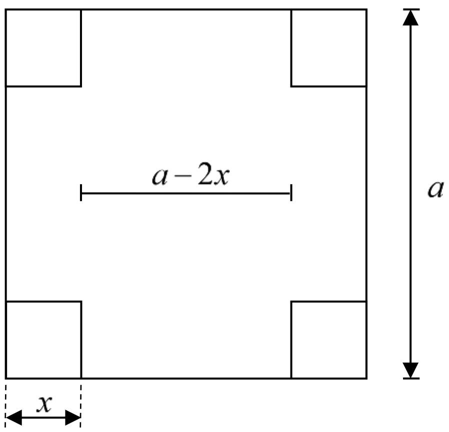


Figura 4.31

$$V = (a-2x)^2 . x$$

$$\frac{dV}{dx} = V' = 2(a-2x)(-2).x + (a-2x)^2.1$$

$$V' = -4ax + 8x^2 + a^2 - 2ax + 4x^2$$

$$12x^2 - 8ax + a^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{8a \mp \sqrt{64a^2 - 48a^2}}{24} = \frac{8a \mp 4a}{24} \quad \to x_1 = \frac{a}{6}$$

$$\to x_2 = \frac{a}{2}$$

Se analiza el signo de la derivada segunda en x= a/6.

$V'' = 24x - 8a.$ De donde $V''_{(a/6)} = 24\dfrac{a}{6} - 8a = 4a - 8a = -4a < 0.$

Luego , en ese punto se tendrá el valor máximo.

En $x = \dfrac{a}{2}$ es $V''_{(a/2)} = 24\dfrac{a}{2} - 8a = 4a > 0$, por lo tanto presenta volumen mínimo.

Obviamente, para la altura *x*=*a*/2, el lado de la base es de longitud cero y por tanto el volumen es nulo (De allí lo de valor mínimo de V).

Bibliografía de referencia

- ***CÁLCULO 1 DE UNA VARIABLE*** (novena edición)- Ron Larson & Bruce H. Edwards. McGraw Hill, 2010.
- ***CÁLCULO. Trascendentes tempranas*** (cuarta edición)- Dennis G. Zill &Warren S. Wright. McGraw Hill, 2011.

CÁLCULO DE UNA VARIABLE. Trascendentes tempranas (sexta edición)- James Stweart. Cengage Learning, 2008.