MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACIÓN
Universidad Nacional de San Juan

FACULTAD DE INGENIERÍA

Departamento de Matemática

Cátedra: CÁLCULO I – ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Autoría: Equipo de Cátedra - 2022

GUÍA DE EJERCICIOS TEMA 4

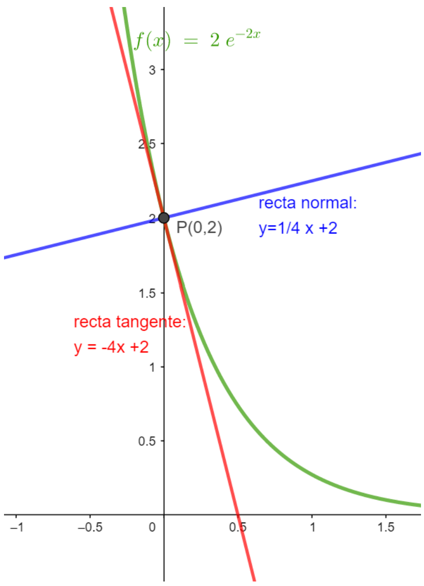
APLICACIONES DE LA DERIVADA

Ecuaciones de las rectas tangente y normal

1. Determinar las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a las funciones que se indican y en el punto dado. Graficar en un mismo par de ejes cartesianos la función y ambas rectas.

1.1. $y = 2e^{-2x}$ en $P(0,2)$

La ecuación de una recta es: $\boldsymbol{y = a \cdot x + b}$ $\quad$ $\boldsymbol{donde}$ $\boldsymbol{a = f'(x_0)}$ ***es la pendiente de la recta en el punto x = x_0.***



La ecuación de una recta de la que se conoce la pendiente y un punto es:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f(x) = 2e^{-2x} \rightarrow f'(x) = -4e^{-2x}$$

$$f'(x_0) = -4e^{-2x_0} = -4e^{-2\cdot 0} = -4$$

Reemplazando: $y - 2 = -4(x - 0)$

$$\boxed{y_1 = -4x + 2}$$

La recta normal cumple con la relación de la pendiente respecto a la de la recta tangente: $a = -\frac{1}{f'(x_0)}$

$$f'(x_0) = -4 \rightarrow -\frac{1}{f'(x_0)} = -\frac{1}{-4} = \frac{1}{4}$$

Reemplazando en la ecuación de una recta de la que se conoce la pendiente y un punto:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\mathrm{y} - 2 = \frac{1}{4}(x - 0)$$

$$\boxed{y_2 = \frac{1}{4}x + 2}$$

En la gráfica se observa que el punto P es común a las tres curvas. En P las rectas y_1 e y_2 son tangente y normal a la función, respectivamente.

Ambas rectas son perpendiculares entre sí por lo que gráficamente forman un ángulo recto entre ellas.

Ejercicios

1.2. $y = x^2$ *en* $Q(2,4)$

1.3. $y = \ln(x - 2)$ *en el punto de abscisa 3*

1.4. $y = sen\, x$ *en* $R(\pi, 0)$

1.5. $y = \sqrt{x+1}$ *en el punto donde la función intercepta al eje y.*

2. Hallar los puntos de la gráfica de las siguientes funciones en los cuales la tangente a la curva es paralela al eje x.

2.1. $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

La recta tangente a la curva será paralela al eje x cuando su pendiente sea nula, es decir que la derivada de la función en ese punto se anula. Usando esa condición se buscan los puntos:

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1} \rightarrow f'(x) = \frac{3x^2(x-1) - (x^3 - 1)}{(x - 1)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{(x - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0 \begin{cases} \boxed{x_1 = -\frac{1}{2}} \\ x_2 = x_3 = 1 \end{cases} \rightarrow x = 1 \notin D_f$$

$$La\ recta\ tangente\ es\ paralela\ al\ eje\ x\ en\ el\ punto\ P\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$$

Ejercicios:

2.2. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$

2.3. $f(x) = \frac{2-x}{x^2-x+2}$

3. ¿Para qué valor de x la tangente a la función $y = 2x^2 - 5x$ forma un ángulo de 45° con el eje x? (recordar la interpretación geométrica de derivada).

4. Hallar un punto de la función $y = x^3 + x^2 + x$ en que la recta tangente es paralela a la recta $y = 2x + 5$.

Diferencial

5. Obtener la expresión del diferencial de las siguientes funciones:

5.1. $y = 2^{3x} \cdot x^2$

$$dy = f'(x)\, dx$$

$$f'(x) = 2^{3x} \cdot ln2 \cdot 3 \cdot x^2 + 2^{3x} \cdot 2x$$

$$\boxed{dy = (2^{3x} \cdot ln2 \cdot 3 \cdot x^2 + 2^{3x} \cdot 2x)dx}$$

5.2. $y = sen^2 x$

$$dy = f'(x)\, dx$$

$$f'(x) = 2 \cdot senx \cdot cos\, x$$

$$\boxed{dy = (2 \cdot senx \cdot cos\, x)dx}$$

Ejercicios:

5.3. $y = x \cdot \sqrt{1 - x^2}$

5.4. $y = ln\left(tg(2x + 3)\right)$

5.5. $y = \sec x + \frac{1}{x^3}$

6. Calcular el valor del diferencial (dy) y el incremento de la variable y (Δy) para las siguientes funciones, en el punto y con los incrementos dados.

6.1. $y = x - 2x^3$ en $x_0 = 1$ con $\Delta x = 0{,}01$

$$dy = f'(x_0)\, dx$$

$$f'(x) = 1 - 6x^2$$

$$dy = (1 - 6{x_0}^2)dx$$

$$dy = (1 - 6 \cdot 1^2) \cdot 0{,}01$$

$$\boxed{dy = -0{,}05}$$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$$\Delta y = x_0 + \Delta x - 2(x_0 + \Delta x)^3 - (x_0 - 2{x_0}^3)$$

$$\Delta y = 1 + 0{,}01 - 2(1 + 0{,}01)^3 - (1 - 2 \cdot 1^3)$$

$$\boxed{\Delta y = -0{,}0506}$$

Ejercicios:

6.2. $y = ln(x^2)$ en $x_0 = 1$ con $\Delta x = 0{,}1$

6.3. $y = x^2 - 2x + 1$ en $x_0 = 2$ con $\Delta x = 0{,}001$

7. Calcular el valor de dy y de Δy para los datos dados. Graficar la función e indicar los valores hallados en la gráfica. Comparar los resultados. Elaborar conclusiones.

7.1. $y = \sqrt[3]{x}\ ;\ \ x_0 = 1$

7.1.1. $\Delta x = 1$

$$dy = f'(x_0)\,dx\ ;\qquad f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$dy = \left(\frac{1}{3}{x_0}^{-\frac{2}{3}}\right)dx$$

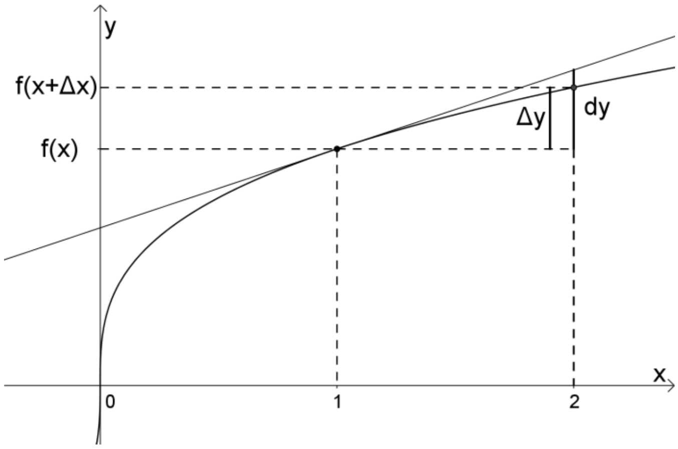
$$\Delta x = 1 \rightarrow dy = \left(\frac{1}{3}1^{-\frac{2}{3}}\right)\cdot 1 = 0{,}33$$

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

$$\Delta y = \sqrt[3]{x_0+\Delta x} - \sqrt[3]{x_0}$$

$$\Delta x = 1 \rightarrow \Delta y = \sqrt[3]{1+1} - \sqrt[3]{1} = 0{,}26$$

$$|dy - \Delta y| = 0{,}07$$



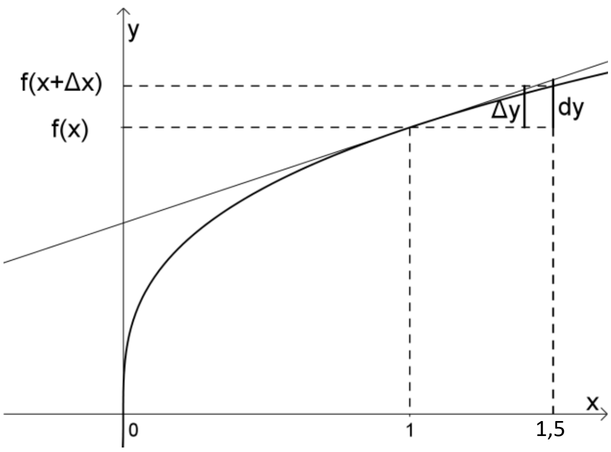
Se observa que el valor del diferencial es aproximado al valor del incremento de la función. Como la función es convexa, el diferencial es ligeramente más grande que el incremento.
Gráficamente se verifica lo obtenido analíticamente. La diferencia entre el segmento dy y el segmento Δy representa el error por aproximación.

7.1.2. $\Delta \mathrm{x} = 0{,}5$

$$\Delta \mathrm{x} = 0{,}5 \rightarrow \mathrm{dy} = \left(\frac{1}{3}1^{-\frac{2}{3}}\right)\cdot 0{,}5 = 0{,}17$$

$$\Delta x = 0{,}5 \rightarrow \Delta y = \sqrt[3]{1+0{,}5} - \sqrt[3]{1} = 0{,}14$$

$$|dy - \Delta y| = 0{,}03$$

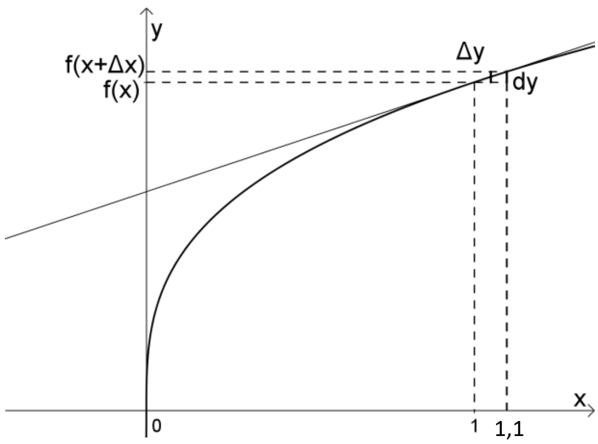


7.1.3. $\Delta \mathrm{x} = 0{,}1$

$$\Delta x = 0{,}1 \rightarrow dy = \left(\frac{1}{3}1^{-\frac{2}{3}}\right)\cdot 0{,}1 = 0{,}033$$

$$\Delta x = 0{,}1 \rightarrow \Delta y = \sqrt[3]{1+0{,}1} - \sqrt[3]{1} = 0{,}032$$

$$|dy - \Delta y| = 0{,}001$$



Con otros valores de incremento en la variable se observan las mismas características.

En estos dos últimos casos, como Δx disminuye con respecto al valor anterior, la aproximación mejora ya que disminuye la diferencia entre el diferencial y el incremento de la función.

Ejercicios:

7.2. $y = e^x$; $x_0 = 0$

7.2.1. $\Delta x = 1$

7.2.2. $\Delta x = 0{,}5$

7.2.3. $\Delta x = 0{,}1$

7.3. $y = x^2$; $x_0 = 2$

7.3.1. $\Delta x = 1$

7.3.2. $\Delta x = 0{,}5$

7.3.3. $\Delta x = 0{,}1$

8. Dado el par de funciones y utilizando las propiedades de la diferencial, obtener la expresión de los diferenciales que se piden.

8.1. $f(x) = \sqrt{x} + 1 \qquad g(x) = e^{2x}$

8.1.1. $d(f+g) = f'(x)dx + g'(x)dx \rightarrow \boxed{d(f+g) = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx + 2e^{2x}dx}$

8.1.2. $d(f \cdot g) = f'(x)\,dx\,g(x) + f(x)\,g'(x)dx$

$$\boxed{d(f \cdot g) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx\,e^{2x} + \left(\sqrt{x}+1\right)2e^{2x}dx}$$

8.1.3. $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'(x)\,dx\,g(x) - f(x)\,g'(x)dx}{g^2(x)}$

$$\boxed{d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx\,e^{2x} - \left(\sqrt{x}+1\right)2e^{2x}dx}{e^{4x}}}$$

Ejercicios:

8.2. $f(x) = senx \quad , \quad g(x) = ln\,x$

8.2.1. $d(f-g)$

8.2.2. $d(f \cdot g)$

8.3. $f(x) = x^2 - x \quad , \quad g(x) = tg\,x$

8.3.1. $d(f+g)$

8.3.2. $d\left(\frac{f}{g}\right)$

Aplicación de la diferencial al cálculo aproximado

9. Aproximar el crecimiento del volumen de una esfera, cuyo radio crece desde 6 cm a 6,1 cm siendo el volumen de la esfera: $V = y = \frac{4}{3}\pi x^3$

10. Al calentar una placa cuadrada metálica de 15 cm de longitud, su lado aumenta 0,04 cm. ¿Cuánto aumentó aproximadamente su área?

11. Al enfriar una placa cuadrada metálica de 20 cm de longitud, su lado disminuye un 0,03%. ¿Cuánto disminuirá porcentualmente su área?

Aproximación de funciones por polinomios

12. Teniendo en cuenta que la fórmula de Taylor para n términos es:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots + f^n(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + TC$$

$$TC = f^{n+1}(\xi)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \; ; \quad \xi = a + (x-a)\theta \; ; \quad 0 < \theta < 1$$

Desarrollar la función dada en el punto indicado aplicando la fórmula de Taylor, hasta el término n=4, expresando el término complementario.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + f^{IV}(a)\frac{(x-a)^4}{4!} + TC$$

$$TC = f^{V}(\xi)\frac{(x-a)^5}{5!} \; ; \quad \xi = a + (x-a)\theta \; ; \quad 0 < \theta < 1$$

12.1. $y = (x+1)\cdot e^{2x}$ en $a = 0$

Se procede a obtener lo necesario para reemplazar en la fórmula:

$f(x) = (x+1)\cdot e^{2x} \to f(a) = f(0) = 1$

$f'(x) = e^{2x} + (x+1)\cdot 2e^{2x} \to f'(a) = f'(0) = 3$

$f''(x) = 2e^{2x} + 2e^{2x} + (x+1)\cdot 4e^{2x} = 4e^{2x} + (x+1)\cdot 4e^{2x} \to f''(a) = f''(0) = 8$

$f'''(x) = 8e^{2x} + 4e^{2x} + (x+1)\cdot 8e^{2x} = 12e^{2x} + (x+1)\cdot 8e^{2x} \to f'''(a) = f'''(0) = 20$

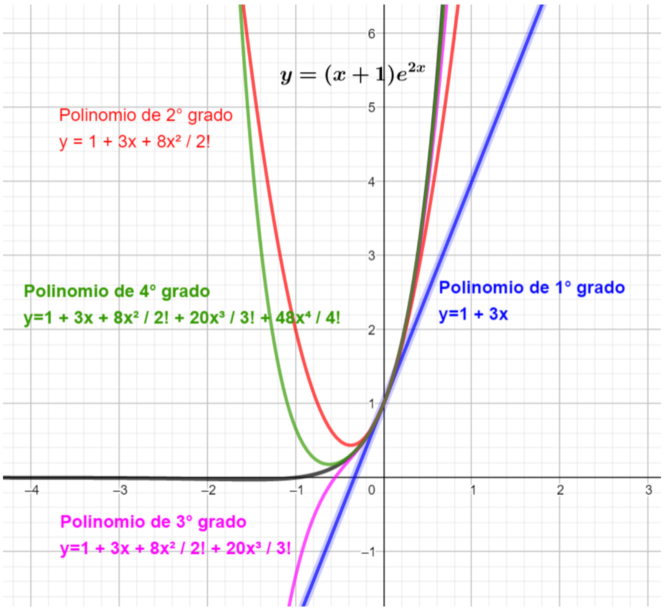
$f^{IV}(x) = 24e^{2x} + 8e^{2x} + (x+1)16e^{2x} = 32e^{2x} + (x+1)\cdot 16e^{2x} \to f^{IV}(a) = f^{IV}(0) = 48$

$f^{V}(x) = 64e^{2x} + 16e^{2x} + (x+1)\cdot 32e^{2x} \to f^{V}(\xi) = 80e^{2\xi} + (\xi+1)\cdot 32e^{2\xi}$

Reemplazando:

$$\boxed{(x+1)\cdot e^{2x} = 1 + 3x + 8\frac{x^2}{2!} + 20\frac{x^3}{3!} + 48\frac{x^4}{4!} + TC}$$

$$\boxed{TC = \left(80e^{2\xi} + (\xi+1)\cdot 32e^{2\xi}\right)\frac{x^5}{5!} \; ; \quad \xi = 0 + (x-0)\theta \; ; \quad 0 < \theta < 1}$$



Cuando se grafica la función y las aproximaciones polinómicas obtenidas con la Fórmula de Taylor, se observa que a mayor grado del polinomio mejor es la aproximación a la función en el entorno del punto dado.

Ejercicios:

12.2. $y = ln\,(x+1)$ en $a = 1$

12.3. $y = \frac{1}{x+2}$ en $a = -1$

12.4. $y = e^{\frac{x}{2}}$ en $a = 2$

12.5. $y = \cos x$ en $a = \frac{\pi}{2}$

13. Sabiendo que la fórmula de Mac Laurin para n términos es:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \cdots + f^n(0)\frac{x^n}{n!} + TC$$

$$TC = f^{n+1}(\theta x)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\ ; \quad 0 < \theta < 1$$

Desarrollar la función dada aplicando la fórmula de Mac Laurin, hasta el término n=4; expresando el término complementario.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + f^{IV}(0)\frac{x^4}{4!} + TC$$

$$TC = f^{V}(\theta x)\frac{x^5}{5!}\ ; \quad 0 < \theta < 1$$

13.1. $y = sen\,x$

$f(x) = sen\,x \to f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x \to f'(0) = 1$

$f''(x) = -sen\,x \to f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x \to f'''(0) = -1$

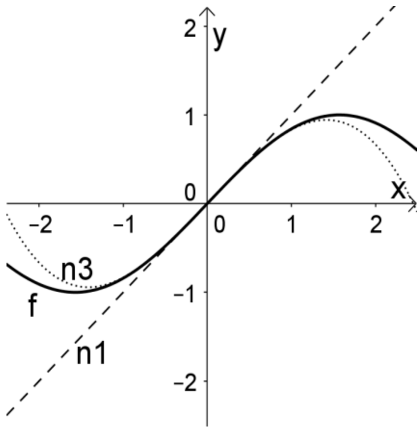
$f^{IV}(x) = sen\,x \to f^{IV}(0) = 0$

$f^{V}(x) = \cos x \to f^{V}(\theta x) = \cos \theta x$

Reemplazando:

$$\boxed{senx = x - \frac{x^3}{3!} + TC}$$

$$\boxed{TC = \cos\theta x \frac{x^5}{5!}\ ;\quad 0 < \theta < 1}$$



Cuando se grafica la función y las aproximaciones polinómicas obtenidas con la Fórmula de Mac Laurin, se observa que a mayor grado del polinomio mejor es la aproximación a la función en el entorno del origen.

Ejercicios:

13.2. $y = x \cdot e^x$

13.3. $y = e^{-3x}$

Regla de Bernoulli L´Hospital

14. Resolver los siguientes límites indeterminados, aplicando la regla de Bernoulli-L´Hospital.

De la forma $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$

14.1. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1}$

Aplicamos BL'H

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \frac{1}{2}$$

Ejercicios:

14.2. $\lim\limits_{x\to a} \frac{sen\ x - sen\ a}{x-a}$

14.3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{cotg\ x}$

14.4. $\lim_{x\to\infty} \frac{ln\, x}{x}$

14.5. $\lim_{x\to 0} \frac{sen\, x}{tg\, x}$

14.6. $\lim_{x\to 0} \frac{tg\, x - x}{x^2 - sen\, x}$

14.7. $\lim_{x\to\infty} \frac{ln\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$

14.8. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^2 \cdot sen\, x}$

14.9. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{tg\, 3x}{tg\, 5x}$

14.10. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^x}$

14.11. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - 1}{\ln\,(e^x + 1)}$

De la forma $\mathbf{0} \cdot \infty$

14.12. $\lim_{x\to 0} tg\, x\, .\, ln\, x = 0 \cdot (-\infty)$ *Aplicamos BL'H*

$$\lim_{x\to 0} tg\, x\, .\, ln\, x = \lim_{x\to 0} \frac{ln\, x}{\frac{1}{tg\, x}} = \lim_{x\to 0} \frac{ln\, x}{cotg\, x} = \frac{-\infty}{\infty} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-cosec^2 x} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{x\, \frac{1}{sen^2 x}} =$$

$$\lim_{x\to 0} -\frac{sen^2 x}{x} = \lim_{x\to 0} -\frac{sen\, x}{x} \cdot \lim_{x\to 0}\, sen\, x = -\,1 \cdot 0 = 0$$

Ejercicios:

14.13. $\lim_{x\to 0}\, x \cdot cotg\, x$

14.14. $\lim_{x\to 0}\, x \cdot ln\, x$

14.15. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (1 - tg\, x)\, sec\, 2x$

De la forma $\infty - \infty$

14.16. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{ln\, x}\right) = \infty - \infty$ *Aplicamos BL'H*

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{ln\, x}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{ln\, x - (x-1)}{(x-1)\, ln\, x} = \lim_{x\to 1} \frac{ln\, x - x + 1}{(x-1)\, ln\, x} = \frac{0}{0} =$$

Aplicamos BL'H

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{ln\, x + (x-1)\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{x\, ln\, x + (x-1)} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{ln\, x + x\frac{1}{x} + 1} = -\frac{1}{2}$$

Ejercicios:

14.17. $\lim_{x\to 3} \left(\frac{2}{x-3} - \frac{4}{x^2-9}\right)$

14.18. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - cotg\, x\right)$

14.19. $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$

14.20. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln\,(x+1)}\right)$

Análisis de extremos

15. Hallar los puntos de la gráfica de $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ en los cuales la tangente a la curva es paralela al eje x. ¿Como se denominan esos puntos?

16. Determinar los puntos críticos de las siguientes funciones. Justificar.

16.1. $y = x^3 - 3x^2 + 2$

***Puntos críticos*: "(x_0, y_0) es un punto crítico si $f'(x_0)=0$ o $f'(x_0)$ no existe y x_0 pertenece al dominio de $f(x)$"**

$$D_f = (-\infty, \infty)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

Resolviendo con la condición de punto crítico: $3x^2 - 6x = 0$

$$3x(x-2) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} A(0,2) \\ B(2,-2) \end{matrix}} \text{ Puntos críticos}$$

Se deduce además que $f'(x)$ existe para todo el dominio de $f(x)$.

Ejercicios:

16.2. $y = x \cdot e^x$

16.3. $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

16.4. $y = -\frac{1}{4}x + 1 - \frac{1}{x^2}$

16.5. $y = \frac{1}{x+2}$

17. Determinar extremos relativos de las siguientes funciones usando el criterio de la derivada primera. Justificar. Hallar intervalos de crecimiento y decrecimiento. Verificar resultados aplicando el criterio de la derivada segunda.

17.1. $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

***Puntos extremos*: "(x_0, y_0) es un punto extremo si es un punto crítico y verifica el criterio de la derivada primera ($f'(x)$ cambia de signo al pasar por x_0) y/o el criterio de la derivada segunda ($f''(x_0) \neq 0$)."**

***Crecimiento*: "f(x) es creciente para toda x perteneciente al intervalo (a, b) si $f'(x)$ es positiva ($f'(x)>0$) para todo x perteneciente a dicho intervalo".**

***Decrecimiento*: "f(x) es decreciente para toda x perteneciente al intervalo (a, b) si $f'(x)$ es negativa ($f'(x)<0$) para todo x perteneciente a dicho intervalo".**

$$D_f = (-\infty, \infty)$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x$$

$$f''(x) = 12x - 6$$

Análisis de extremos:

Se determinan los puntos críticos que son los posibles extremos: $6x^2 - 6x = 0$

$$6x(x-1) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} A(0,0) \\ B(1,-1) \end{matrix}} \text{ Puntos críticos}$$

Se deduce además que $f'(x)$ existe para todo el dominio de $f(x)$.

Análisis del punto $A(0,0)$:

- *Aplicando criterio de primera derivada:*

$$\left.\begin{matrix} f'(x_1 - \Delta x) = f'(0-0{,}2) = 6(-0{,}2)^2 - 6\,.\,(-0{,}2) = 1{,}44 > 0 \\ f'(x_1 + \Delta x) = f'(0+0{,}2) = 6(0{,}2)^2 - 6\,.\,(0{,}2) = -0{,}96 < 0 \end{matrix}\right\}$$

Como $f'(x)$ cambia de signo al pasar por x_1= 0 entonces existe extremo.

Como $f'(x)$ pasa de positivo a negativo al pasar por x_1= 0, entonces en $A(0,0)$ hay un máximo.

- *Aplicando criterio de segunda derivada:*

$$f''(x_1) = f''(0) = 12\,.\,0 - 6 = -6 < 0$$

Como $f''(x)$ en x_1= 0 es no nula entonces existe extremo.

Como $f''(x)$ es negativa en x_1= 0, entonces en $A(0,0)$ hay un máximo.

Análisis del punto$B(1,-1)$:

- *Aplicando criterio de primera derivada:*

$$\left.\begin{matrix} f'(x_2 - \Delta x) = f'(1-0{,}2) = 6(0{,}8)^2 - 6\,.\;0{,}8 = -0{,}96 < 0 \\ f'(x_2 + \Delta x) = f'(1+0{,}2) = 6(1{,}2)^2 - 6\,.\,(1{,}2) = 1{,}44 > 0 \end{matrix}\right\}$$

Como $f'(x)$ cambia de signo al pasar por x_2= 1 entonces existe extremo.

Como $f'(x)$ pasa de negativo a positivo al pasar por x_2= 1, entonces en $B(1,-1)$ hay un mínimo.

- *Aplicando criterio de segunda derivada:*

$$f''(x_2) = f''(1) = 12\,.\,1 - 6 = 6 > 0$$

Como $f''(x)$ en x_2= 1 es no nula entonces existe extremo.

Como $f''(x)$ es positiva en x_2= 1, entonces en $B(1,-1)$ hay un mínimo.

Guía de Ejercicios Tema 4

Análisis de crecimiento:

Intervalos del dominio	*Signo de f´(x) en el intervalo*	*Comportamiento de f(x)*
$(-\infty, 0)$	$f'(-1) = 6\,.\,(-1)^2 - 6\,.\,(-1) = 12 > 0$	*f(x) crece*
$(0, 1)$	$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 6\,.\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6\,.\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} < 0$	*f(x) decrece*
$(1, \infty)$	$f'(2) = 6\,.\,2^2 - 6\,.\,2 = 12 > 0$	*f(x) crece*

f(x) crece en los intervalos $(-\infty, 0)$ *y* $(1, \infty)$ *y decrece en el intervalo* $(0, 1)$.

Ejercicios:

17.2. $f(x) = 3x^2 - 4x - 2$

17.3. $y = (x^2 - 4)^{\frac{2}{3}}$

17.4. $y = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$

17.5. $y = 2x^3 + 6x^2 - 18x + 5$

18. Un proyectil es disparado desde un cañón siguiendo una trayectoria parabólica, dada por la ecuación $h(x) = -4{,}9\,t^2 + 74{,}8\,t$, donde *h* es la altura en metros y *t* el tiempo en segundos. Hallar el tiempo en que el proyectil alcanza su altura máxima y el valor de esa altura.

19. Se desea cercar un terreno utilizando 200 m de rollo de tela de alambre, el terreno cercado debe quedar en forma cuadrada o rectangular. Determine las dimensiones del terreno de tal manera que el área cercada sea máxima.

20. Determinar puntos de inflexión de las siguientes funciones. Hallar los intervalos de concavidad y convexidad. Justificar.

20.1. $y = 2x^3 + 6x^2 - 3x + 1$

***Puntos de inflexión*: "(x_0, y_0) es un punto de inflexión si la derivada segunda se anula o no existe en dicho punto (f´´(x_0) = 0 o ∄) y f(x) cambia su concavidad al pasar por x_0."**

***Concavidad*: "f(x) es cóncava para toda x perteneciente al intervalo (a, b) si f´´(x) es positiva (f´´(x)>0) para todo x perteneciente a dicho intervalo".**

***Convexidad*: "f(x) es convexa para toda x perteneciente al intervalo (a, b) si f´´(x) es negativa (f´´(x)<0) para todo x perteneciente a dicho intervalo".**

$$D_f = (-\infty, \infty)$$

$$f'(x) = 6x^2 + 12x - 3$$

$$f''(x) = 12x + 12$$

Análisis de puntos de inflexión:

Se determinan los posibles puntos de inflexión: $12\,x + 12 = 0$

$$12\,x = -12$$

$x = -1 \rightarrow C(-1, 8)$ *Posible punto de inflexión*

Se deduce además que $f''(x)$ *existe para todo el dominio de* $f(x)$.

Guía de Ejercicios Tema 4

Análisis de concavidad:

Intervalos del dominio	*Signo de f´´(x) en el intervalo*	*Comportamiento de f(x)*
$(-\infty,-1)$	$f''(-2) = 12\,.(-2) + 12 = -12 < 0$	*f(x) es convexa*
$(-1,\infty)$	$f''(2) = 12\,.\,2 + 12 = 36 > 0$	*f(x) es cóncava*

f(x) es convexa en el intervalo $(-\infty,-1)$ *y es cóncava en el intervalo* $(-1,\infty)$.

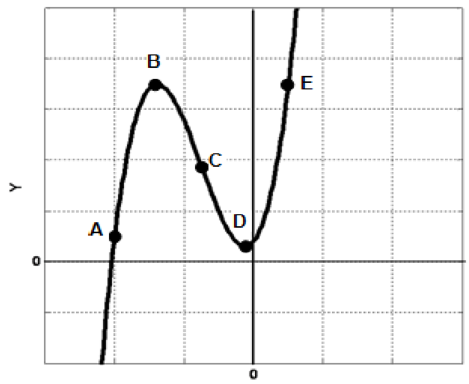
Como f´´(x) cambia de signo al pasar por x_0= -1 entonces $\boxed{C(-1,8) \text{ es un punto de inflexión}}$.

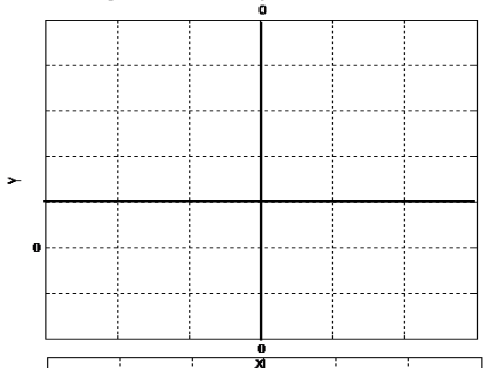
Ejercicios:

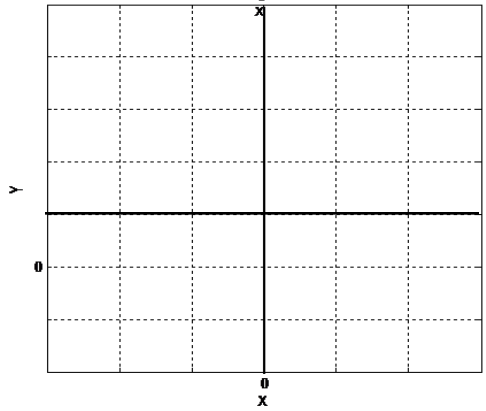
20.2. $y = \frac{x}{x^2+1}$ 20.3. $y = x^3 - 4x + 7$ 20.4. $y = \sqrt[3]{x+2}$

21. Una función tiene un máximo en x= -2, un punto de inflexión en x = 0 y un mínimo en x = 2. Representar aproximadamente f(x) y f'(x).

22. La siguiente figura muestra la gráfica de una función f (x) dos veces derivable. Estudiar el signo de la primera y la segunda derivada de f (x) en cada uno de los puntos indicados. Esbozar la gráfica de la función de la derivada primera y la función de la derivada segunda en otros pares de ejes cartesianos.







23. Dada la ecuación de la función, realizar un análisis global determinando las características de la gráfica de la función y esbozando una gráfica con los resultados obtenidos.

23.1. $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x$

$$D_f = (-\infty, \infty)$$

$$f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 96x - 64 = 4\,(x^3 - 9x^2 + 24x - 16)$$

$$f''(x) = 12x^2 - 72x + 96 = 12\,(x^2 - 6x + 8)$$

Ceros o raíces

$$x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x = 0$$

$$x(x^3 - 12x^2 + 48x - 64) = 0 \rightarrow \boxed{r_1 = 0}$$

$$x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = 0 \rightarrow \boxed{r_2 = 4}\ tres\ raíces\ coincidentes$$

Análisis de extremos:

$$x^3 - 9x^2 + 24x - 16 = 0 \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = x3 = 4 \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} A(1,-27) \\ B(4,0) \end{matrix}}\ \textit{Puntos críticos}$$

Se deduce además que $f'(x)$ existe para todo el dominio de $f(x)$.

Análisis del punto $A(1,-27)$:

- *Aplicando criterio de primera derivada:*

$$\left.\begin{matrix} f'(x_1 - \Delta x) = f'(1-1) = 4\,(0^3 - 9\cdot 0^2 + 24\cdot 0 - 16) = -64 < 0 \\ f'(x_1 + \Delta x) = f'(1+1) = 4\,(2^3 - 9\cdot 2^2 + 24\cdot 2 - 16) = 16 > 0 \end{matrix}\right\}$$

Como $f'(x)$ cambia de signo al pasar por x_1= 1 entonces existe extremo.

Como $f'(x)$ pasa de negativo a positivo al pasar por x_1= 1, entonces $\boxed{\text{en } A(1,-27) \text{ hay un mínimo}}$.

- *Aplicando criterio de segunda derivada:*

$$f''(x_1) = f''(1) = 12\,(1^2 - 6\cdot 1 + 8) = 36 > 0$$

Como $f''(x)$ en x_1= 1 es no nula entonces existe extremo.

Como $f''(x)$ es positiva en x_1= 1, entonces $\boxed{\text{en } A(1,-27) \text{ hay un mínimo}}$.

Análisis del punto $B(4,0)$:

- *Aplicando criterio de primera derivada:*

$$\left.\begin{matrix} f'(x_2 - \Delta x) = f'(4-1) = 4\,(3^3 - 9\cdot 3^2 + 24\cdot 3 - 16) = 8 > 0 \\ f'(x_2 + \Delta x) = f'(4+1) = 4\,(5^3 - 9\cdot 5^2 + 24\cdot 5 - 16) = 16 > 0 \end{matrix}\right\}$$

Como $f'(x)$ no cambia de signo al pasar por x_2= 4 entonces $\boxed{\text{en } B(1,-1) \text{ no existe extremo}}$.

Análisis de crecimiento:

Intervalos del dominio	*Signo de f´(x) en el intervalo*	*Comportamiento de f(x)*
$(-\infty, 1)$	$f'(0) = 4\,(0^3 - 9 \cdot 0^2 + 24 \cdot 0 - 16) = -64 < 0$	*f(x) decrece*
$(1, 4)$	$f'(2) = 4\,(2^3 - 9 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 - 16) = 16 > 0$	*f(x) crece*
$(4, \infty)$	$f'(5) = 4\,(5^3 - 9 \cdot 5^2 + 24 \cdot 5 - 16) = 16 > 0$	*f(x) crece*

f(x) crece en los intervalos $(1, 4)$ y $(4, \infty)$ y decrece en el intervalo $(-\infty, 1)$.

Análisis de puntos de inflexión:

Se determinan los posibles puntos de inflexión:

$$12\,(x^2 - 6x + 8) = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} C(2, -16) \\ B(4, 0) \end{matrix}$$ *Posibles puntos de inflexión*

Se deduce además que $f''(x)$ existe para todo el dominio de $f(x)$.

Análisis de concavidad:

Intervalos del dominio	*Signo de f´´(x) en el intervalo*	*Comportamiento de f(x)*
$(-\infty, 2)$	$f''(0) = 12\,(0^2 - 6 \cdot 0 + 8) > 0$	*f(x) es cóncava*
$(2, 4)$	$f''(3) = 12\,(3^2 - 6 \cdot 3 + 8) < 0$	*f(x) es convexa*
$(4, \infty)$	$f''(5) = 12\,(5^2 - 6 \cdot 5 + 8) > 0$	*f(x) es cóncava*

f(x) es convexa en el intervalo $(2, 4)$ y es cóncava en los intervalos $(-\infty, 2)$ y $(4, \infty)$.

Como f´´(x) cambia de signo al pasar por x_1= 2 y x_2= 4 entonces:

$C(2, -16)$ y $B(4, 0)$ son puntos de inflexión.

Análisis de asíntotas:

Asíntota vertical:

$$\lim_{x \to a}(\,x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x) = \infty \rightarrow no\ existe\ a$$

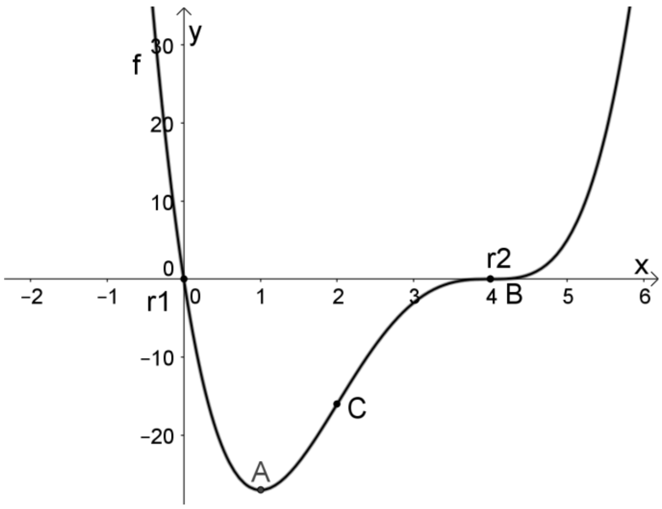
$$por\ lo\ tanto\ \boxed{f(x)\ no\ tiene\ Asíntota\ vertical.}$$

Asíntota oblicua:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x}{x} = \lim_{x \to \infty}(x^3 - 12x^2 + 48x - 64) = \infty$$

$$\rightarrow por\ lo\ tanto\ \boxed{f(x)\ no\ tiene\ Asíntota\ oblicua\ ni\ horizontal.}$$

Los resultados se visualizan en la gráfica:



Ejercicios:

23.2. $y = \frac{x}{x^2+2}$

23.3. $y = x^3 - 3x^2$