MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACIÓN
Universidad Nacional de San Juan

FACULTAD DE INGENIERÍA

Departamento de Matemática

Cátedra: CÁLCULO I – ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Autoría: Equipo de cátedra - 2023

TEMA 6

INTEGRALES DEFINIDAS, INTEGRALES IMPROPIAS Y APLICACIONES DE LA INTEGRAL

6.1 - El problema del área de regiones planas

En unidades de estudio anteriores hemos abordado uno de los problemas que dio origen al *Calculo Diferencial, el problema de la recta tangente,* y hemos visto como, a través del proceso de límite de la pendiente de una recta secante, se puede hallar la pendiente de una recta tangente a la curva en un punto de la misma.

Otro de los problemas clásicos era el *problema del área de regiones planas*. Las matemáticas previas al Cálculo permitían encontrar áreas de rectángulos, que es la región plana más sencilla. A partir de la definición del área del rectángulo, se dedujeron las fórmulas para las áreas de otras regiones planas, como triángulos (un rectángulo puede descomponerse en triángulos), trapecios (que pueden descomponerse en rectángulos y triángulos) y polígonos planos que pueden descomponerse en triángulos. Sin embargo, calcular áreas de otras regiones con fronteras curvilíneas era una tarea más difícil. Este *problema dio origen al Calculo Integral.* Se pudo resolver, también mediante un proceso de paso de límite. En este caso el límite se aplica a una suma de infinitas áreas de rectángulos con el fin de encontrar el área de una región plana limitada por gráficas de funciones. El tema se tratará con la mayor sencillez posible, atendiendo a que el desarrollo está dirigido a estudiantes de ingeniería.

6.2 - Cálculo del área de una región plana

Para facilitar la comprensión del tema se verán los principios de la integral definida a partir de **bases geométricas, estudiados por Cauchy (1789 – 1857).**

Se desea calcular el área de una región plana limitada por la función $f(x)$, las rectas $x = a$; $x = b$ y el eje x.

- La **función $y = f(x)$ debe ser continua y no negativa en el intervalo cerrado $[a, b]$**, es decir $f(x) \geq 0$, $f(x) \in C \quad \forall\, x \in [a, b]$.

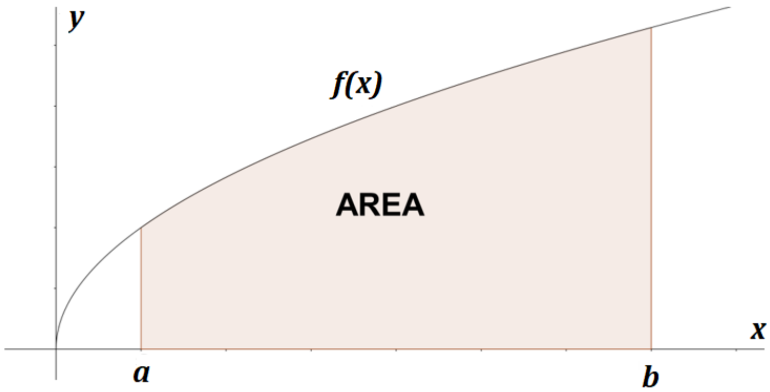


Figura 6.1

- Se divide el intervalo $[a, b]$ en **n subintervalos** de ancho regular: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

- Como $f(x)$ es continua en $[a, b]$, existirá un valor máximo y un mínimo de la función en cada subintervalo (Teorema de Bolzano –Weierstrass):

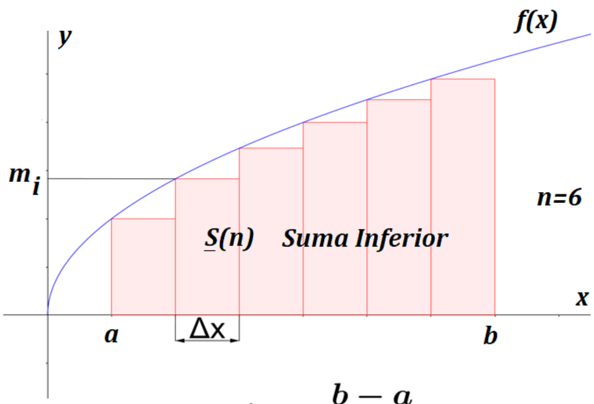
m_i: valor mínimo de la función en el *i-ésimo* subintervalo

M_i: valor máximo de la función en el *i-ésimo* subintervalo

A partir de estos conceptos se realizarán aproximaciones repetidas al valor del área indicada en la figura 6.1, mediante suma de áreas de rectángulos por defecto (Suma Inferior) y por exceso (Suma Superior), como se detalla a continuación.

- Cálculo de la Suma Inferior:

Se va a proceder a realizar una aproximación del **valor del Área** sumando las áreas de rectángulos inscriptos en la región. En la Figura 6.2 cada rectángulo tiene como base Δx y como altura el valor mínimo de la función en el subintervalo en cuestión. Esta suma se denomina inferior o suma por defecto.



$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Figura 6.2

Área del rectángulo inscripto: $a_i = m_i \Delta x$

Suma Inferior:

$$\underline{S}(n) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x = m_1 \Delta x + m_2 \Delta x + \cdots + m_n \Delta x$$

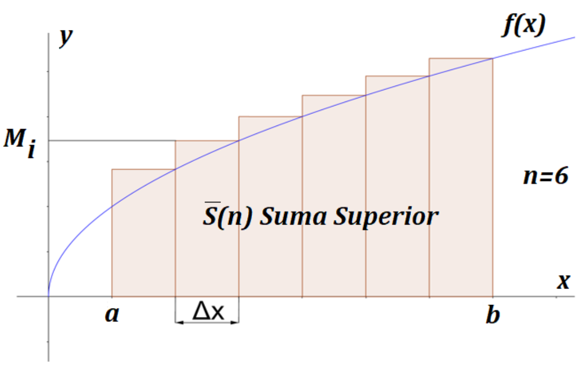
Como se puede observar la ***Suma Inferior es menor al Área*** que se desea calcular.

Suma Inferior: $\underline{S}(n) \leq ÁREA$

El guion en la parte inferior, $\underline{S}(n)$, indica que se trata de una suma inferior.

- Cálculo de la Suma Superior:

La suma de áreas de rectángulos circunscriptos se denomina suma superior o suma por exceso. En la Figura 6.3 cada rectángulo tiene como base Δx y como altura el valor máximo de la función en el subintervalo en cuestión.



$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Figura 6.3

Área del rectángulo circunscripto: $A_i = M_i \Delta x$

Suma Superior:

$$\overline{S}(n) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x = M_1 \Delta x + M_2 \Delta x + \cdots + M_n \Delta x$$

Como se puede observar la ***Suma Superior es mayor al Área*** *que* se desea calcular:

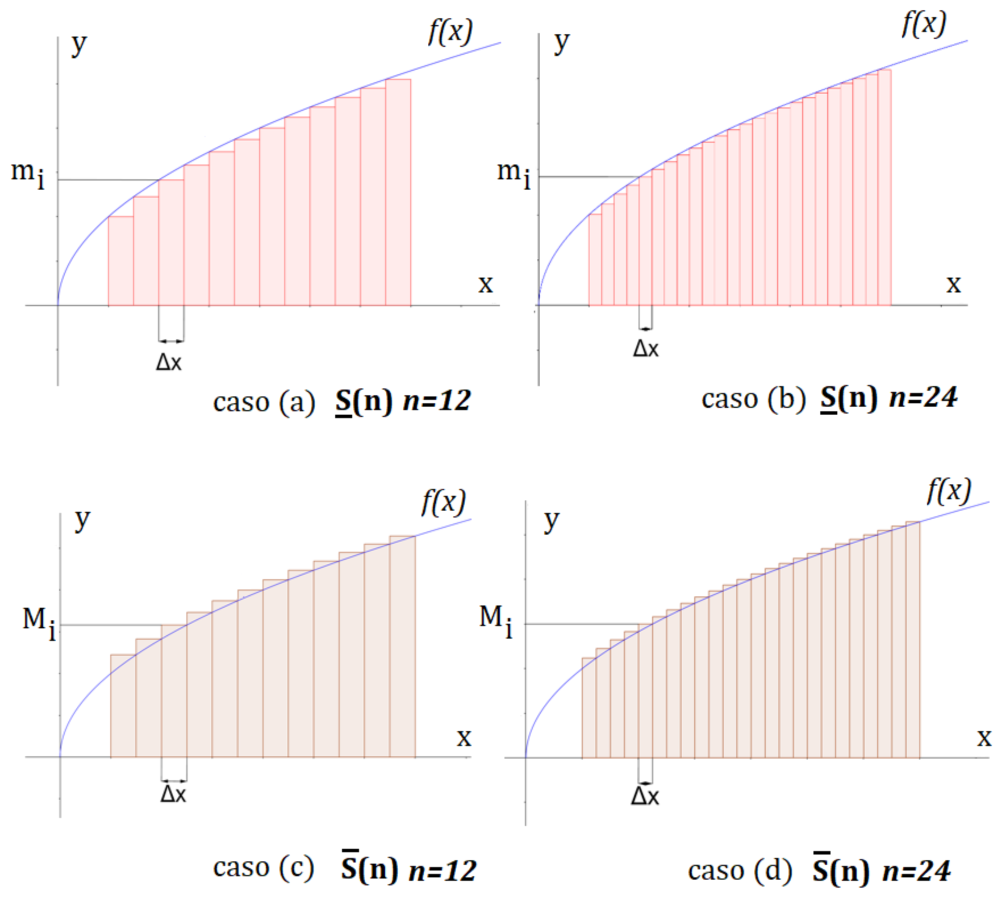
Suma Superior: $\overline{S}(n) \geq ÁREA$

El guion en la parte superior, $\overline{S}(n)$, indica que se trata de una suma superior.

En conclusión, el **ÁREA comprendida entre la curva $\boldsymbol{f(x)}$, $\boldsymbol{x = a}$, $\boldsymbol{x = b}$, $\boldsymbol{y}$ *el eje* $\boldsymbol{x}$ es:**

$$\underline{S}(n) \leq ÁREA \leq \overline{S}(n)$$

Para cualquier valor de n, la suma inferior (suma de áreas de rectángulos inscriptos) será menor que la suma superior (suma de áreas de rectángulos circunscriptos). A medida que el valor de n crece, o sea que se subdivide el intervalo $[a, b]$ en un mayor número de subintervalos la diferencia entre las sumas inferior y superior disminuye, se muestra en la Figura 6.4.



caso (a) $\underline{\mathbf{S}}$**(n)** ***n=12***

caso (b) $\underline{\mathbf{S}}$**(n)** ***n=24***

caso (c) $\overline{\mathbf{S}}$**(n)** ***n=12***

caso (d) $\overline{\mathbf{S}}$**(n)** ***n=24***

Figura 6.4

Teorema: Límite de las Sumas Inferior y Superior

Sea $f(x)$ continua y no negativa en [a,b]. Los límites cuando n→∞ de las sumas inferior y superior son iguales.

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(n)$$

Siendo: m_i y M_i valores mínimos y máximos respectivamente de la función $f(x)$ en el i-ésimo subintervalo, y $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Ya que en el límite, cuando $n \to \infty$, las sumas se igualan, se puede tomar un valor arbitrario $x = c_i$ en cada i-ésimo subintervalo sin afectar el límite, $x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$ (teorema del encaje)

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x$$

Estamos en condiciones de definir el área de una región plana de la siguiente manera:

Definición: Área de una región plana:

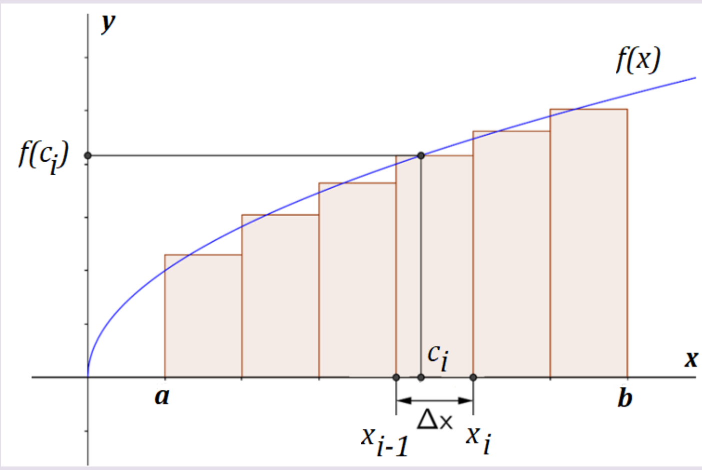


Figura 6.5

Sea $f(x)$ continua, no negativa en el intervalo $[a, b]$. El área de la región comprendida entre la gráfica $f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$ es:

$$ÁREA = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x$$

Donde : $x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

Ejemplo:

Dada la función $y = x^2$ estimar el área bajo la curva desde $x = 0$ a $x = 1$:

La función $y = x^2$ es **continua y no negativa en el intervalo cerrado** $[0,1]$. Una primera aproximación para calcular el área comprendida entre la curva, el eje x y las rectas $x = 0$ a $x = 1$ (Figura 6.6), se hará dividiendo el intervalo en **cuatro subintervalos (n=4)** de ancho $\Delta x = 1/4$

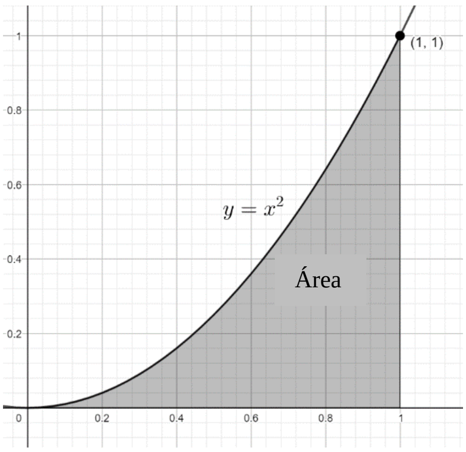


Figura 6.6

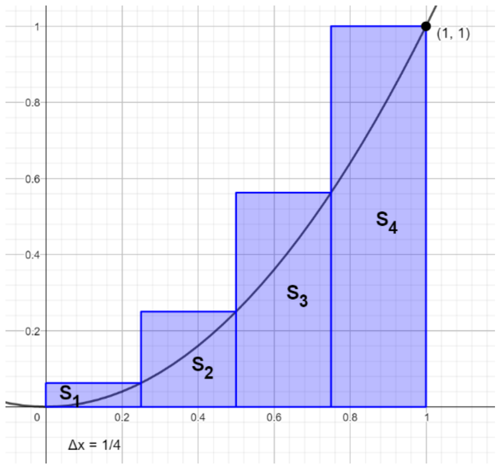


Figura 6.7

Se realiza una aproximación al valor del **Área** calculando la ***suma superior*** (Figura 6.7), como la suma de cuatro áreas de rectángulos cuya base es $\Delta x = \frac{1}{4}$ y las alturas son los valores de la función $y = x^2$ en los puntos extremos de la derecha de cada subintervalo [0,¼] , [¼ , ½], [½ , ¾], [¾ , 1], ya que en este caso, al ser una función monótona creciente, corresponden al máximo valor de la función en el subintervalo.

$$\bar{S}(4) = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3 + \bar{S}_4$$

$$\bar{S}(4) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}(1)^2 = 0{,}46875$$

En la figura se puede observar que el Área real es menor que la suma superior con $n = 4$:

$$ÁREA < \bar{S}(4) \rightarrow ÁREA < 0{,}46875$$

De la misma manera se estima el valor del Área calculando la suma inferior (Figura 6.8), o sea la suma de áreas de rectángulos inscriptos en la región, con base $\Delta x = \frac{1}{4}$ y cuyas alturas son los valores de $f(x)$ en los puntos extremos de la izquierda de los subintervalos, que son los mínimos valores de $f(x)$ en cada subintervalo, por ser una función monótona creciente.

La ***suma inferior*** es: $\underline{S}(4) = \underline{S_1} + \underline{S_2} + \underline{S_3} + \underline{S_4}$

$$\underline{S}(4) = \frac{1}{4}\,(0)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 0{,}21875$$

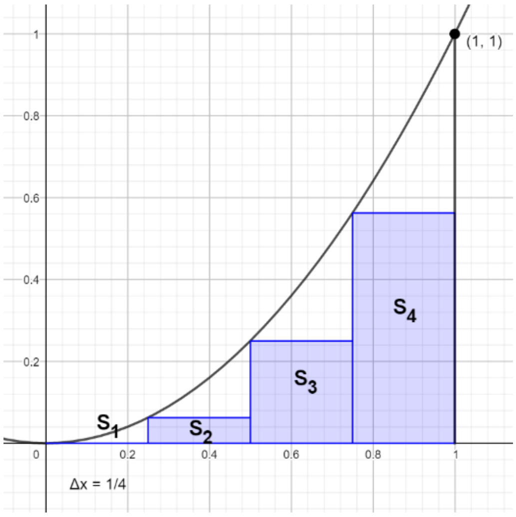
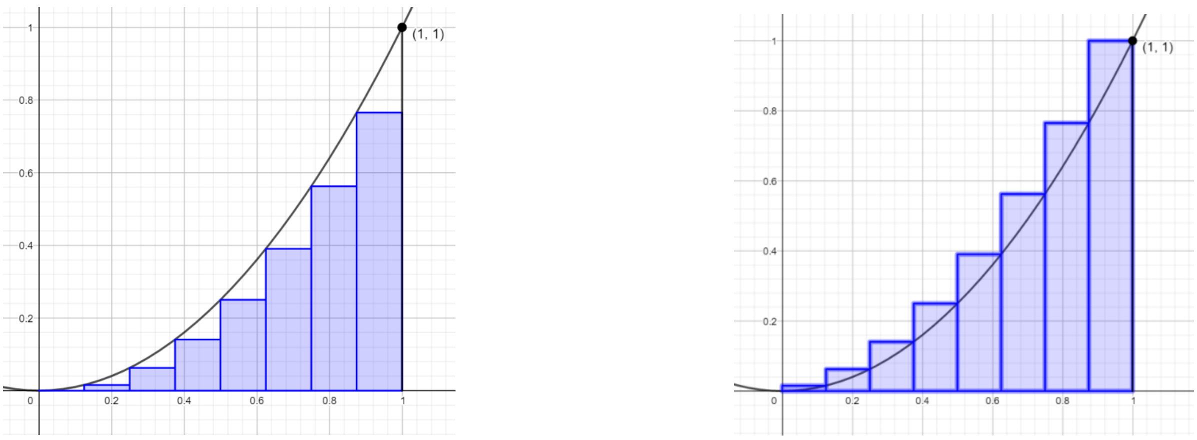


Figura 6.8

Se observa que el ***Área*** es mayor que la ***suma inferior***, de modo que el valor real del área se encuentra comprendido entre los valores superior e inferior obtenidos:

$$\mathbf{0,21875} \le \text{Á}\boldsymbol{REA} \le \mathbf{0,46875}$$

Se puede repetir este procedimiento con un número mayor de rectángulos. En la Figura 6.9 se muestra el intervalo dividido en **ocho subintervalos** de igual ancho.



$\underline{S}(8) = 0{,}2734$ $\overline{S}(8) = 0{,}3984$

Figura 6.9

Al calcular la suma de las áreas de los rectángulos más pequeños $\underline{S}(8)$ y la suma de las áreas de los rectángulos más grandes $\overline{S}(8)$, se obtienen mejores aproximaciones del valor del ***Área***:

$$\mathbf{0,2734} \leq \acute{A}\boldsymbol{REA} \leq \mathbf{0,3984}$$

Este ejemplo ilustra que siempre la suma inferior es menor a la superior para cualquier valor de n. Por otro lado la diferencia entre las dos sumas disminuye al crecer el número de sub-intervalos. En efecto si tomamos el límite para $n \to \infty$ tanto la suma superior como la inferior se igualan y tienden al valor ***1/3***, que es el ***valor real del Área***.

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(n) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(n) = \acute{A}REA = \frac{1}{3}$$

6.3 - Integral Definida según Riemann

El límite de una suma se relaciona con muchas aplicaciones, como la longitud de un arco, el valor medio, volúmenes, trabajos y áreas de superficies. El matemático alemán Georg Friedrich Bernhard **Riemann** (1826 – 1866) estudió el proceso de integración, haciendo abstracción del caso particular del cálculo del área geométrica. Para ello **sustentó el análisis sobre bases aritméticas** en lugar de bases geométricas.

6.3.1 - Consideraciones preliminares

Se dará precisión a algunos conceptos utilizados en este tema

- Condiciones de la función.

Función definida en el intervalo cerrado $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$: esto significa función continua y acotada.

Cabe aclarar que la integral de Riemann también admite un numero finito de puntos de discontinuidad en el intervalo cerrado $[a, b]$, siempre que la función sea acotada. Si bien la mayor parte de las funciones que encontramos son continuas, el límite en la definición también existe si f(x) tiene un número finito de discontinuidades evitables o de salto, pero no discontinuidades infinitas. De modo que podemos definir asimismo la integral definida de tales f (x). Para simplificar el concepto hablaremos solo de función definida en el intervalo cerrado $[a, b]$**.**

- Partición

- Definición de Partición con sub-intervalos de distintas longitudes:

Por una "partición" P del intervalo $I = [a, b]$, debe entenderse un conjunto finito de números reales $\{x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ donde $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n = b$

Es decir, la partición determina un conjunto de sub-intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de longitud Δx_i que cumple con:

1. $[x_0; x_1] \cup [x_1; x_2] \cup \ldots \cup [x_{n-1}, x_n] = [a, b]$, es decir la unión de los sub-intervalos es el intervalo $[a, b]$.
2. $[x_{i-1}, x_i] \cap [x_i, x_{i+1}] = \{x_i\}$.
3. $k \neq j \rightarrow [x_{k-1}, x_k] \cap [x_j, x_{j+1}] = \phi$. (conjunto vacio)

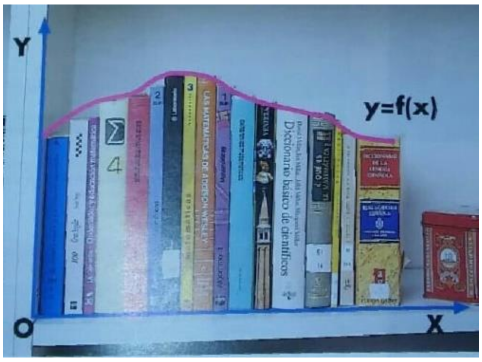
El *i-ésimo* sub-intervalo de *P* se denotará por $I_i = [x_{i-1}, x_i]$; su longitud es $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Por ejemplo, la longitud del primer sub-intervalo es $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, del segundo $\Delta x_2 = x_2 - x_1$. Es claro que $\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots.. + \Delta x_n = b - a$ (la longitud del intervalo [a,b]).

Observar que a veces la partición se hace de tal forma que los sub-intervalos que quedan determinados tienen igual longitud, se denomina partición regular, esto se hace simplemente para facilitar los cálculos, pero deberá entenderse que la partición puede realizarse de cualquier forma, aun sin seguir ninguna ley. Solo deberá cuidarse que $x_0 \equiv a$, $x_n \equiv b$.

- Norma de la Partición

La norma de la partición P se denota como $\|P\|$ y es la **longitud del mayor de los sub-intervalos** formados por la partición P:

$$\|P\| = \max_{P} \Delta x_i$$



Para aclarar conceptos
El lomo de cada libro es un rectángulo. La suma de áreas de estos rectángulos se aproxima al valor del área comprendida entre la curva f, el eje x y los extremos fijados.
El ancho del mayor de los lomos (último libro de la biblioteca) corresponde a la norma de la partición.

- Refinamiento

Se dice que $P'\{x_0´, x_1´, x_2´....., x_P´\}$ es un refinamiento de $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots., x_n\}$ si toda *xi* que se encontraba en *P*, también se encuentra en *P´*. Para simplificar el concepto, simplemente se dice que *P´* puede construirse a partir de *P*, distribuyendo puntos de partición adicionales entre aquellos que ya se tienen, subdividiendo uno o varios sub-intervalos de P.

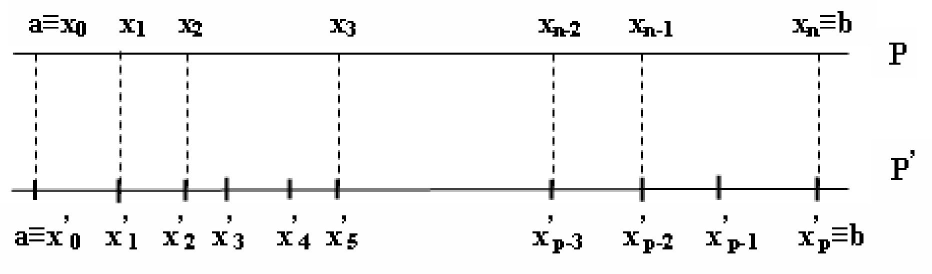


Figura 6.10

Si P_1 y P_2 son particiones de $[a, b]$ y $P_1 \subseteq P_2$, entonces P_2 es un refinamiento de P_1.

Por ejemplo: si $P_1 = \{1; 1,5; 2\}$ entonces P_2 y P_3 serán refinamientos de P_1:

$$P_2 = \{1; 1,2; 1,4; 1,5; 2\} \qquad P_3 = \{1; 1,3; 1,5; 1,6; 2\}$$

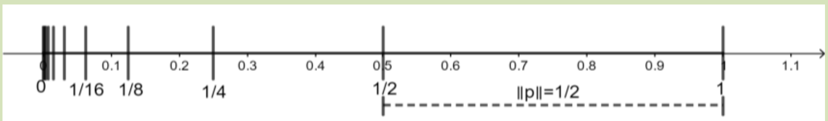
Hay que tener presente que a medida que la norma $\|P\|$ es más pequeña, crece n (número de puntos empleados para realizar la partición del intervalo I); y obviamente si una partición se refina sucesivamente de tal modo que la norma $\|P\| \to 0$, entonces $n \to \infty$, la inversa puede no ser cierta ya que se puede refinar indefinidamente solo algunos subintervalos y dejar uno o más sin refinar, con lo que $n \to \infty$, pero $\|P\|$ no tiende a cero, como se observa en el ejemplo siguiente:

Sea la partición P del intervalo [0,1] determinada por:

$$P \quad \to \quad 0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n-1}} < \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots < \frac{1}{2^4} < \frac{1}{2^3} < \frac{1}{2^2} < \frac{1}{2} < 1$$

$$\|P\| \quad \to \quad \frac{1}{2} \quad \textit{longitud del mayor de los subintervalos}$$

$$n \to \infty, \text{ sin embargo } \|P\| \textit{ no tiende a cero}$$



- Suma Inferior para la partición P

Como $f(x)$ es acotada en $[a, b]$; también lo será en cada sub-intervalo. Es decir que existe un valor máximo y valor mínimo de la función para cada sub-intervalo de la partición P.

Sea $m_i(f, P)$ el valor mínimo de $f(x)$ en el i-ésimo sub-intervalo para la partición P.

Por suma inferior de $f(x)$ para la partición P se define:

$$\begin{aligned}\underline{S}(f,P) &= \sum_{P} m_i \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_i(f,P)(x_i - x_{i-1}) \\ &= m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \cdots + m_n(x_n - x_{n-1})\end{aligned}$$

Y una vez más esta notación con $\sum_{P}$ sirve para indicar que la cantidad: $m_i \Delta x_i$ se calcula para cada sub-intervalo I_i formado para la partición P y se realiza la suma de todas estas cantidades (Figura 6.11) Puede expresarse simplificadamente como: $\underline{S}(f,P) = \underline{S}_P = \underline{S}$

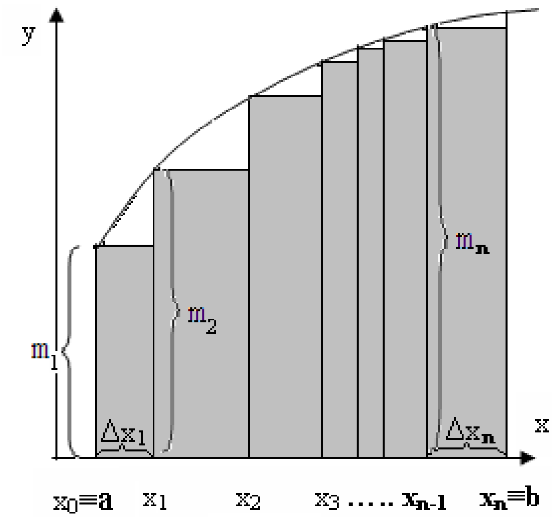


Figura 6.11

- Suma Superior para la partición P

Como $f(x)$ es acotada en $[a,b]$; también lo será en cada sub-intervalo. Es decir que existe un valor máximo de la función para cada sub-intervalo de la partición P.

Sea $M_i(f,P)$ el valor máximo de $f(x)$ en el i-ésimo sub-intervalo, para la partición P.

Por suma superior $\overline{S}(f,P)$ de $f(x)$ para la partición P (Figura 6.12) se define:

$$\overline{S}(f,P) = \sum_{P} M_i \Delta x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} M_i(f,P)(x_i - x_{i-1})$$

$$= M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \cdots + M_n(x_n - x_{n-1})$$

Puede escribirse: $\overline{S}(f,P) = \overline{S}_P = \overline{S}$.

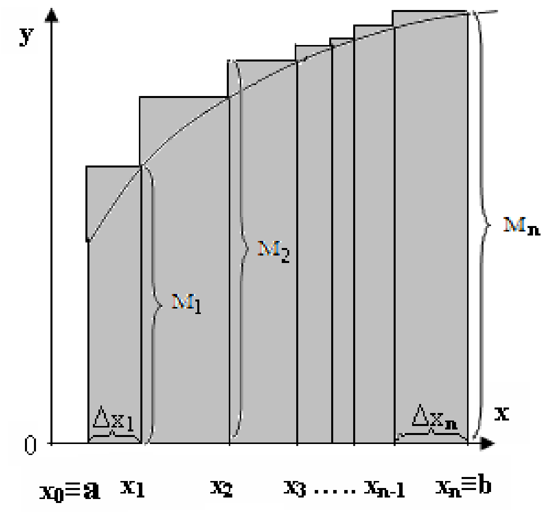


Figura 6.12

6.3.2 - Propiedades de las Sumas.

- Si $f(x)$ es acotada en $[a,b]$ y P es una partición cualquiera de $[a,b]$. Entonces $\underline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,P)$. Esto se deduce fácilmente del hecho que $m_i \leq M_i$
- Si $f(x)$ está acotada en $I = [a,b]$ y P y P' son particiones de I, siendo P' un refinamiento de P, entonces: $\overline{S}(f,P') \leq \overline{S}(f,P)$, y $\underline{S}(f,P') \geq \underline{S}(f,P)$.
- Si $f(x)$ es acotada en $[a,b]$ y P_1 y P_2 son dos particiones cualesquiera de $[a,b]$; entonces $\underline{S}(f,P_1) \leq \overline{S}(f,P_2)$

Con las propiedades anteriores quedan establecidos los siguientes hechos:

- Al refinar una partición, las sumas superiores decrecen o permanecen inalteradas y las sumas inferiores crecen o se mantienen**.**
- Toda suma inferior es menor o igual que toda suma superior.
- Existen infinitas particiones posibles del intervalo $[a,b]$, en el que la función f es acotada. Para cada partición existe una $\underline{S}$ y una $\overline{S}$.

6.3.3 - Suma de Riemann usando un punto intermedio del subintervalo.

Se considera una suma que no es necesariamente una suma superior o una suma inferior, pero que siempre se encuentra comprendida entre ellas.

Dada una partición P de un intervalo $I = [a, b]$, se toma un punto arbitrario c_i que pertenece al subintervalo $I = [x_{i-1}, x_i]$, o sea $x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$.

La **suma de Riemann para la partición P** (Figura 6.13) es:

$$S(f, P, c_i) = \sum_P f(c_i)\Delta x_i$$

$$x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$$

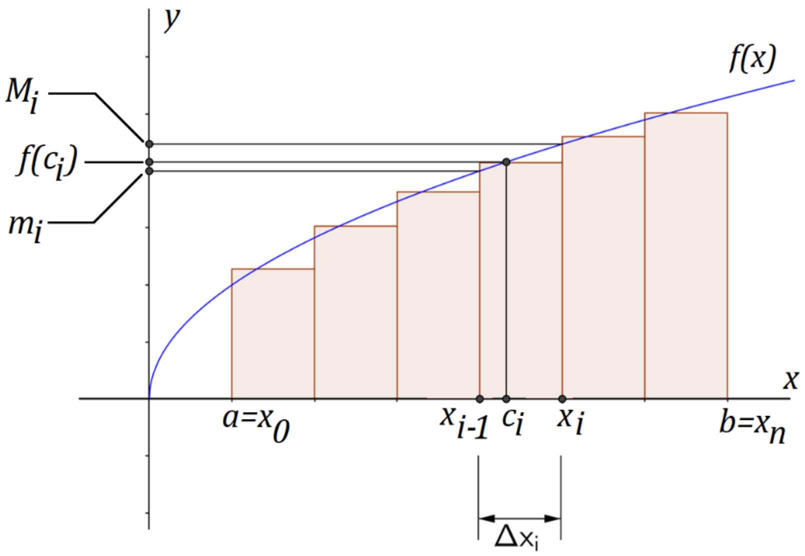


Figura 6.13

Tomando el límite para la norma de la partición tendiendo a cero, las sumas inferiores y superiores de la partición convergen al mismo valor y como la suma de Riemann se mantiene entre ambas, se asegura que también convergerá a dicho valor común.

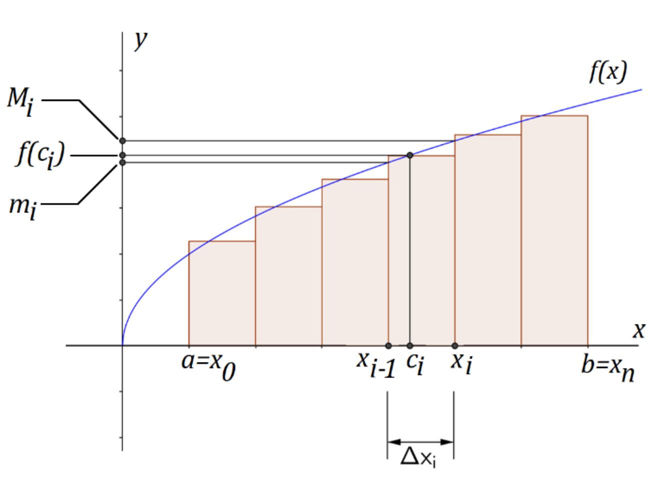
$$\lim_{\|P\|\to 0} \underline{S}(f, P) = \lim_{\|P\|\to 0} \bar{S}(f, P) = \lim_{\|P\|\to 0} S(f, P, c_i) = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

La definición de la suma de Riemann implica, que si las sumas inferiores y superiores se acercan, a medida que se refina P en forma adecuada (o sea a medida que la norma de P tiende a cero) y convergen a un valor común, la suma de Riemann (que se mantiene entre la suma superior e inferior) también convergerá a dicho valor común.

6.3.4 - Integral definida usando el concepto de Suma de Riemann

Definición de Integral Definida

Si $f(x)$ está definida en el intervalo cerrado $[a,b]$ y el límite $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ existe, entonces $f(x)$ es integrable en $[a,b]$:



$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

Siendo:

- $\|P\|$ La norma de la partición P, si $\|P\| \to 0$, entonces necesariamente $n \to \infty$
- $S(f, P, c_i) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ Suma de Riemann para la partición P. $x_{i-1} \le c_i \le x_i$

$\int_a^b f(x)\,dx$ se lee: **Integral definida entre a y b de $f(x)$, diferencial x.**

$f(x)$ se denomina integrando, los números a y b son los límites inferior y superior respectivamente

No es casual la semejanza entre la notación de la integral definida y la notación de la integral indefinida. Se podrá entender cuando se estudie más adelante el Primer Teorema Fundamental del Cálculo.

Para aclarar conceptos:

-La integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ da como resultado un número que no depende de x.
Podríamos usar cualquier letra en lugar de x, sin modificar el resultado de la integral

-Es importante aclarar que las integrales indefinidas y definidas son entidades distintas. Una integral indefinida da como resultado un número infinito de funciones, mientras que la **integral definida da como resultado un número.**

6. 4 - Integrabilidad

En dos teoremas se plantean las condiciones que son suficientes para que una función sea integrable en un intervalo [a,b].

Teorema: Continuidad implica integrabilidad
Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx$ existe, es decir f es integrable en [a,b]. Lo recíproco no es cierto.

Hay funciones definidas para cada valor de x en [a,b] para las cuales el $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ existe, entonces la integral existe. Sin embargo la existencia de una discontinuidad en [a,b] no hace necesariamente que la integral no exista. La continuidad de una función en el intervalo [a,b] es condición suficiente pero no necesaria para garantizar la existencia de la integral. El siguiente teorema proporciona otra condición suficiente para la integrabilidad en [a,b]

Teorema : Condiciones suficientes para integrabilidad
Si una función está acotada sobre el intervalo cerrado [a,b], es decir, si existe una constante positiva M tal que $-M \leq f(x) \leq M$ para toda x en el intervalo y tiene un número finito de discontinuidades en [a,b], entonces f es integrable en el intervalo [a,b].

6.4 - Propiedades fundamentales de la integral definida

Propiedad 1: Todo factor constante se puede sacar fuera del signo de la integral definida:

$$\text{Si } k=cte. \qquad \Rightarrow \int_a^b k\ f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

Propiedad 2: La integral definida de una suma algebraica de varias funciones, es igual a la suma algebraica de las integrales de los *n* sumandos.

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Propiedad 3: Si en $[a,b]$ donde $a < b$ las funciones $f(x)$ y $g(x)$ satisfacen la condición $f(x) \leq g(x)$ Entonces:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Propiedad 4: Si m y M son los valores mínimo y máximo respectivamente que alcanza $f(x)$ sobre $[a,b]$ y $a < b$ Entonces:

$$m \leq f(x) \leq M \qquad m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

En realidad *m*(*b*-*a*) es una suma inferior y *M*(*b*-*a*) es una suma superior; y como: $\underline{S}(f;P) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \overline{S}(f;P)$ y la propiedad 4 queda demostrada.

Propiedad 5: Dados tres números arbitrarios a, b, c, se verifica:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Propiedad 6: se verifica: $\int_a^a f(x)dx = 0$

Propiedad 7: se verifica que: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Propiedad 8: Teorema del valor medio para integrales

Si *f(x)* es continua en $[a, b]$, existe un punto $c \in [a, b]$, tal que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(c)$$

Demostración: Sea $a < b$ y, m y M mínimo y máximo de *f(x)* en *[a;b]* respectivamente.

En virtud de la propiedad 4:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Dividiendo todos los miembros por $(b-a)$:

$$m \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

Puesto que la función $f(x)$ es continua, recorre todos los valores entre m y M, *(su mínimo y su máximo en el intervalo)*, existirá $f(c)$ con $c \in [a, b]$ de tal forma que $m \leq f(c) \leq M$, entonces:

$$\frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\,dx = f(c)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c)$$

El teorema de valor medio establece que hay un rectángulo cuya área es exactamente igual a la de la región bajo la curva.

Ejemplo aplicando Teorema de Valor Medio

Determinar el valor de x=c que verifica el "Teorema del valor medio para integrales definidas", para la función $f(x)=\sqrt{x}$ en el intervalo *[4;9]* en el primer cuadrante (se utiliza sólo su rama positiva). En algún punto interior al intervalo [4,9] se tendrá que:

$$f(c)=\frac{1}{9-4}\int_4^9 \sqrt{x}\,dx=\frac{1}{5}\int_4^9 x^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{1}{5}\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2}\right)\Bigg]_4^9=\frac{2}{15}\left(9^{\frac{3}{2}}-4^{\frac{3}{2}}\right)=2{,}5333$$

$$f(c)=\sqrt{c}=2{,}5333 \quad\Rightarrow\quad c=(2{,}5333)^2=6{,}418$$

Se sabe, porque lo asegura la tesis del teorema del valor medio, que el punto "c" existe, que cumple con

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\;f(c)$$

Gráficamente en la Figura 6.14, para el ejemplo dado, se puede observar lo que representa cada miembro de la igualdad.
Y analíticamente:

$$\int_4^9 \sqrt{x}\;dx=12{,}67 \qquad\qquad f(c).(b-a)=2{,}5333.(9-4)=12{,}67$$

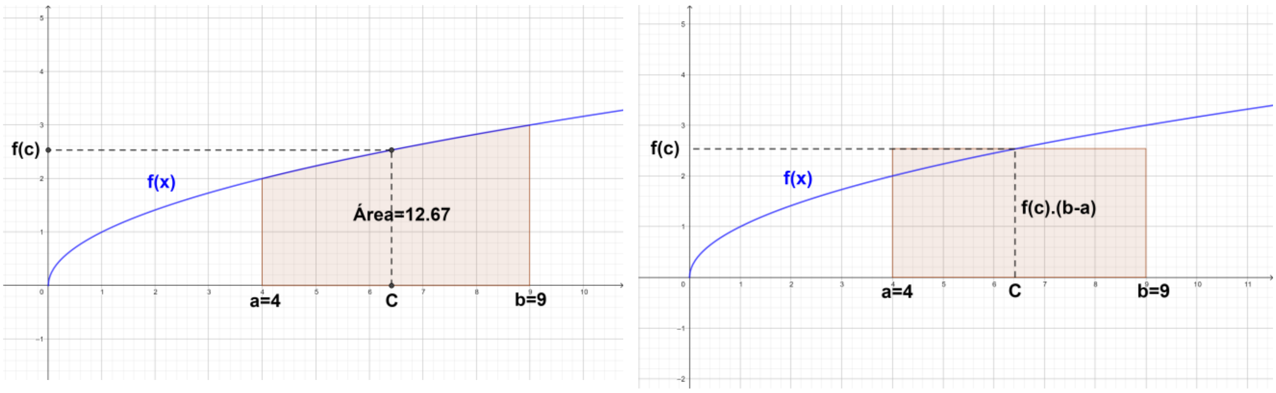


Figura 6.14

6.5 - Primer teorema fundamental del cálculo integral

Conduce a probar que el **cálculo de la integral definida está estrechamente ligado al concepto de integral indefinida (antiderivada ó primitiva de una función).**

Sea la integral definida: $\int_a^b f(x)\,dx$, el resultado es un número que depende de sus límites.

Si x es un número del intervalo [a,b], entonces si f es continua en [a,b} es continua en [a,x]. Entonces sea la integral $\int_a^x f(t)\,dt$, donde el límite inferior es fijo y el límite superior variable, su resultado es un número que depende solo del valor x, es variable, y da lugar a definir una nueva función $F(x)$, que dependerá del valor de x.

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Para evitar confusiones se denomina ***t*** a la variable de integración, pues la integral no depende de la notación de la variable de integración.

Primer teorema fundamental del cálculo integral:

Hipótesis: f es continua en el intervalo cerrado $[a; x]$, por lo que existe la integral definida $\int_a^x f(t)\, dt$

Tesis: El resultado es una función $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ que es una **primitiva de *f*.**

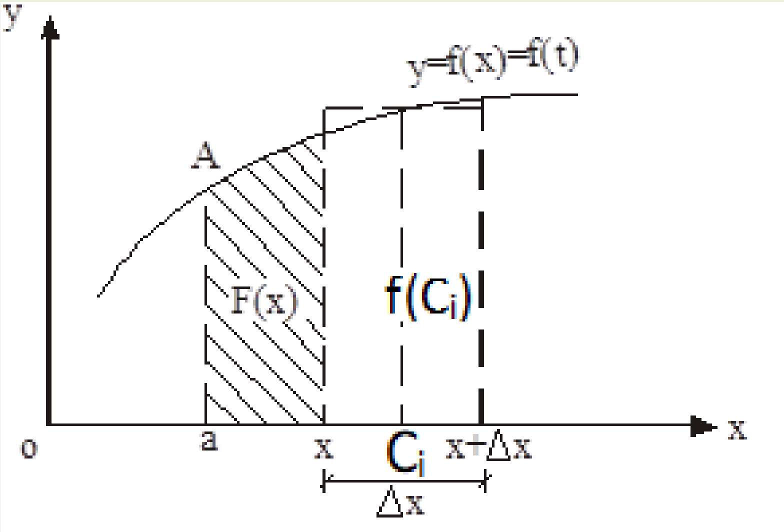


Figura 6.15

Demostración: Hay que probar que $F(x)$ es primitiva de f, por lo tanto, por definición de primitiva, se debe demostrar que $F'(x) = f(x)$

Por la def. de derivada : $F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$

De la figura 6.15 : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

La función F evaluada en $x + \Delta x$ es:

$$F(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt$$

$$= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \qquad (1)$$

Por el teorema del valor medio: (figura 6.15) $\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = [(x+\Delta x) - x] f(c_i)$

$$= \Delta x f(c_i) \qquad (2)$$

Al Reemplazar (2) en (1): $F(x+\Delta x) = \int_a^x f(t)dt + \Delta x f(c_i)$

Entonces: $F(x+\Delta x) - F(x) = \int_a^x f(t)dt + \Delta x f(c_i) - \int_a^x f(t)dt$

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \Delta x f(c_i) \qquad (3)$$

Al despejar $f(c_i)$ de (3): $f(c_i) = \dfrac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$

Al tomar lím. para $\Delta x \to 0$: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(c_i) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$ (4)

Cuando $\Delta x \to 0, c_i \to x$:
(observe la figura 6.15) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(c_i) = f(x)$ (5)

Al Reemplazar (5) en (4): $f(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$

como : $F'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x)$

Se ha demostrado que: $F'(x) = f(x)$ c.q.d

6.6 - Segundo teorema fundamental del Cálculo Integral: Formula de Newton-Leibniz o Regla de Barrow

Segundo teorema fundamental del cálculo integral o Regla de Barrow

Hipótesis: Sea $F(x)$ una primitiva de la función continua $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$

Tesis: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Demostración:

Por hipótesis: $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ (1)

Por el Primer Teorema Fundamental del Calculo Integral: $\int_a^x f(t)dt$ es otra primitiva de $f(x)$ (2)

Dos primitivas de una misma función difieren en una constante: $\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$ (1) y (2)

Para determinar C:

$1 - Si, x = a$: $\int_a^a f(t)dt = 0 \rightarrow 0 = F(a) + C$

$C = -F(a)$

$2 - Si, x = b$: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Al reescribir la expresión anterior en función de la variable x se obtiene: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$ c.q.d

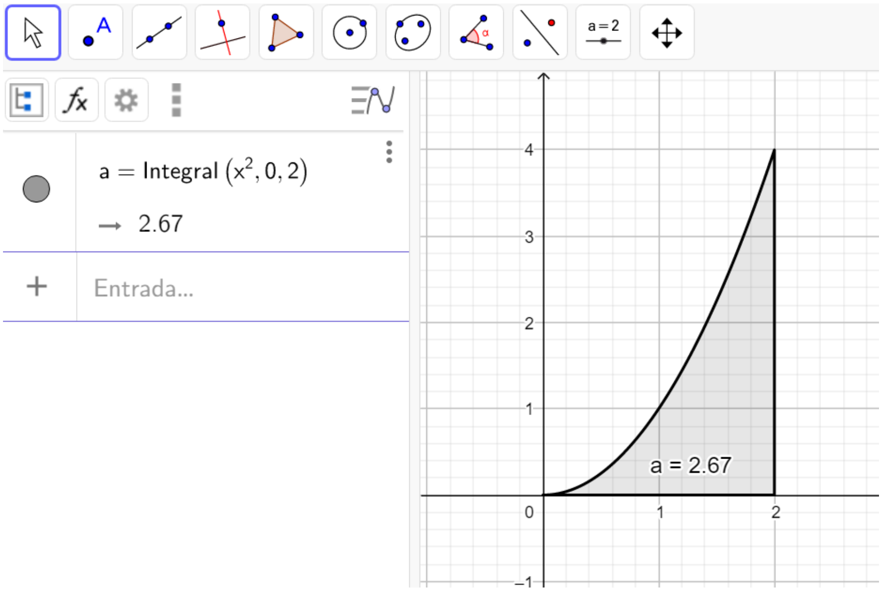
Conociendo la primitiva de una función, la regla de Barrow permite calcular la integral definida sin necesidad de hallar el límite de una suma.

<u>Ejemplos de Cálculo de la Integral Definida usando la Regla de Barrow</u>

1. **Ejemplo cuyo resultado de la integral es un número positivo:**

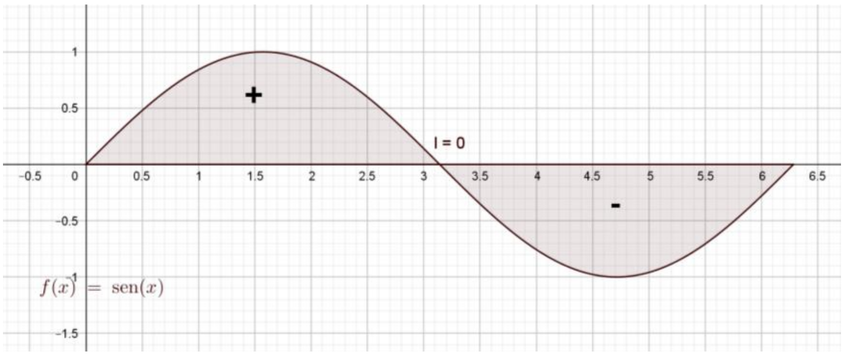
$$\int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big]_0^2 = \frac{1}{3}\left[2^3 - 0^3\right] = \frac{8}{3}$$

Con Geogebra:



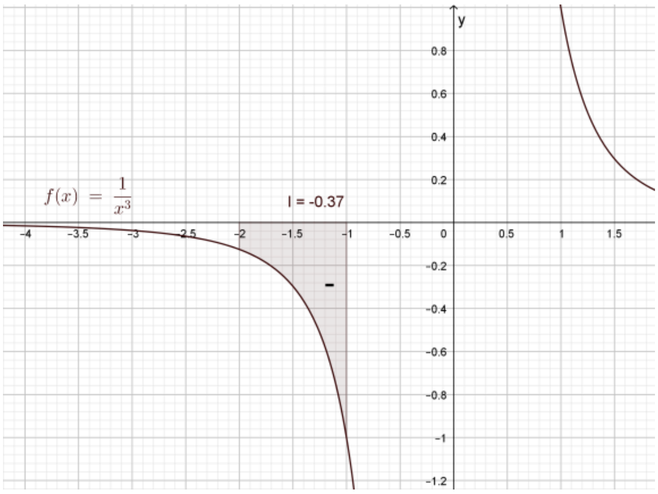
2. **Ejemplo cuyo resultado de la integral es nulo:**

$$\int_0^{2\pi} sen\ x\ dx = \cos\ x\Big]_0^{2\pi} = \cos\ 0 - \cos\ 2\pi = 0$$



3. Ejemplo cuyo resultado de la Integral es negativo:

$$I=\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x^3}\,dx=\int_{-2}^{-1}x^{-3}\,dx=-\frac{1}{2}x^{-2}\Big|_{-2}^{-1}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}\right)\Big|_{-2}^{-1}=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(-1)^2}-\frac{1}{(-2)^2}\right]=-\frac{3}{8}$$



Para aclarar conceptos:
El resultado de la integral definida es un número, que puede ser positivo, nulo o negativo.
En caso de requerir el cálculo de áreas se debe plantear la integral de manera distinta, se verá más adelante en las aplicaciones de la integral. Como se observa en los ejemplos 2 y 3 los resultados nulo y negativo no se pueden interpretar como valores de área.
Se entiende por área la función que asigna a un recinto plano un valor numérico real no negativo.

6.7 - Cambio de variable en una integral definida

Como se vio en el tema anterior en algunos casos, para resolver una integral, es necesario cambiar la variable de integración (método de sustitución). En las integrales definidas un cambio de variable implica también determinar los valores de los límites de integración para la nueva variable.

Dada: $\int_a^b f(x)\,dx$ y siendo $x=\varphi(t)$

Si: 1) $\varphi(\alpha)=a \quad \wedge \quad \varphi(\beta)=b$

2) $\varphi(t) \quad \wedge \quad \varphi'(t)$ son continuas en $[\alpha;\beta]$

3) La función compuesta $f[\varphi(t)]$ está definida y es continua en $[\alpha;\beta]$, entonces:

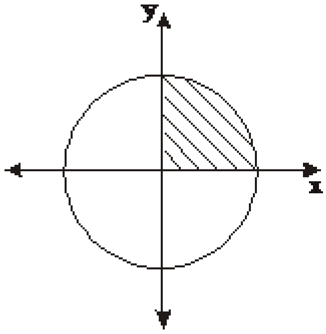
$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]d\varphi = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

La demostración es similar a la efectuada en integrales indefinidas. (Método de sustitución).

Ejemplo 1: Calcular la siguiente integral:

$$\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx \qquad \begin{cases} x = r\,sen\,t \\ dx = r\cos t\,dt \end{cases}$$

Si $x=0 \Rightarrow t=0$ Si $x=r \Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}$



$$\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} r\sqrt{1-sen^2 t}.r\cos t dt = r^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t dt = \int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}dt =$$

$$= \frac{r^2}{2}\int_0^{\pi/2} dt + \frac{r^2}{2}\int_0^{\pi/2}\cos 2t dt = \frac{r^2}{2}\left[\frac{t+sen 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi r^2}{4}$$

Geométricamente se puede interpretar este resultado, como el Área de $1/4$ círculo.

Ejemplo 2: Calcular $\int_1^4 \frac{x}{4x+2}dx$

$I = \int_1^4 \frac{x}{4x+2}dx;$ se debe hacer un cambio de variables y límites de integración

$4x+2=t;\ x=\dfrac{t-2}{4};\ dx=\dfrac{1}{4}dt$ t además: $\begin{matrix} \text{si } x_1 = 1 \to t_1 = 6 \\ \text{si } x_2 = 4 \to t_2 = 18 \end{matrix}$

$$I = \int_6^{18}\frac{\left(\frac{t-2}{4}\right)\frac{1}{4}dt}{t} = \frac{1}{16}\int_6^{18}\left(\frac{t-2}{t}\right)dt = \frac{1}{16}\int_6^{18}dt - \frac{2}{16}\int_6^{18}\frac{dt}{t} = \frac{1}{16}[t]_6^{18} - \frac{1}{8}[\ln(t)]_6^{18} =$$

$$= \frac{18-6}{16} - \frac{1}{8}[\ln(18)-\ln(6)] = 0,613$$

6.8 - Integrales impropias

Al definir la integral definida $\int_a^b f(x)dx$, hemos estudiado que la función $f(x)$ debe ser definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ Se extenderá el concepto de integral definida a los casos donde el intervalo de integración es infinito y/o cuando la $f(x)$ tiene una discontinuidad infinita (comportamiento no acotado) en el intervalo de integración. Estas integrales se denominan impropias.

6.8.1 - Integrales impropias con límites de integración infinitos

Sea $f(x)$ una función continua y definida en $[a, +\infty)$. La integral $\int_a^\infty f(x)dx$ es una integral impropia ya que uno de los límites de integración es infinito.

Se interpreta como la región comprendida entre la curva *f(x)*, el eje x y la recta x=a hasta el infinito.

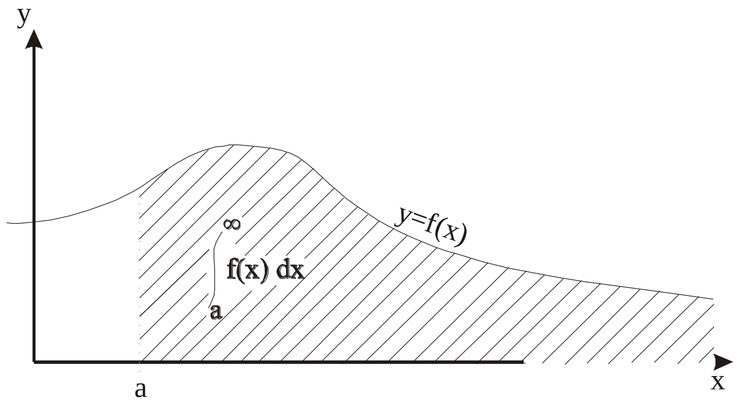


Figura 6.16

Puesto que *f(x)* está definida $\forall x > a$, se puede tomar un valor arbitrario b que cumpla con la condición $b > a$. Resulta entonces lógico pensar en el valor de la integral cuando $b \to \infty$, lo que conlleva a la utilización del concepto de Límite.

La integral impropia entonces se debe expresar y calcular de la siguiente manera, usando el concepto de límite.

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx}$$

Así como la interpretación geométrica de una integral definida con límites finitos es el área encerrada por la curva f(x), el eje *x* y las rectas $x=a$ y $x=b$ (cuando f(x) es no negativa en el intervalo cerrado [a,b]); la integral impropia se interpreta geométricamente como el área de dominio infinito, comprendida entre la curva f(x) (cuando f(x) es no negativa), el eje *x*, en el intervalo infinito $[a,\infty)$.

Para otros intervalos infinitos, las integrales impropias se determinan de modo análogo:

<u>Definición de Integrales Impropias con límites de integración infinitos</u>

Caso 1. Si f es continua y definida en el intervalo $[a, \infty)$, entonces

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

Caso 2. Si f es continua y definida en el intervalo $(-\infty, b\,]$, entonces

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

Caso 3. Si f es continua y definida en el intervalo $(-\infty,\infty)$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_c^b f(x)\,dx$$

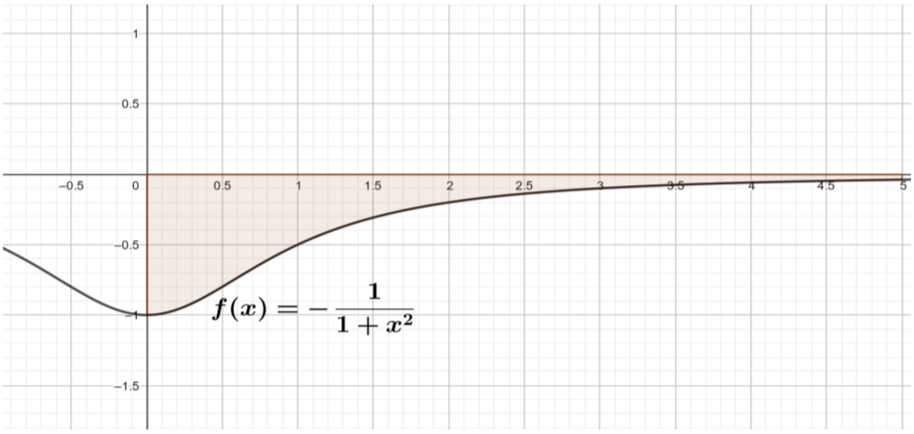
donde c es un número real arbitrario.

En los dos primeros casos, la integral impropia converge si el límite existe; en caso contrario, la integral impropia diverge. En el tercer caso, la integral impropia de la izquierda diverge si cualquiera de las integrales impropias de la derecha diverge.

Ejemplo Caso 1 → Calcular $\int_0^{\infty} -\frac{1}{1+x^2}dx$

$$\int_0^{\infty} -\frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b -\frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to\infty} -arctg\,x\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty} -arctg\,x - (-arctg\,0) = -\frac{\pi}{2}$$

El límite existe y vale $-\pi/2$ por lo tanto la integral impropia converge. Particularmente en este caso el valor obtenido **no** se puede interpretar como el valor del área, a menos que se lo imponga como valor absoluto.

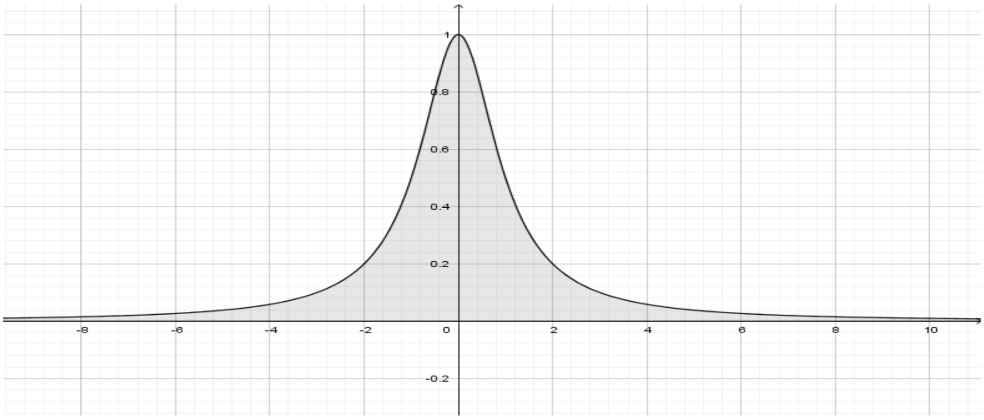


Ejemplo Caso 3 $\rightarrow$ Calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^{o} \frac{1}{1+x^2}dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx + \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} arctg\ x\Big|_{a}^{0} + \lim_{b\to\infty} arctg\ x\Big|_{0}^{b}$$

$$= (arctg\ 0 - \lim_{a\to-\infty} arctg\ a) + (\lim_{b\to\infty} arctg\ b - arctg\ 0) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$



El límite existe y vale π, por lo tanto, la integral impropia converge. En este caso el valor obtenido representa el valor del área bajo la curva.

Muchas veces no es necesario determinar el valor de la integral, basta saber si ella converge o no. Para este propósito resultan de utilidad los siguientes teoremas de comparación, que se enuncian a continuación:

Teorema 1: H) Si $\forall x > a$, se cumple $0 \le f(x) \le g(x)$ y además $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ es convergente.

T) Entonces $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge y $\int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Teorema 2: H) Si $\forall x \in [a;\infty)$ se cumple $0 \le g(x) \le f(x)$ y $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ es divergente

T) Entonces $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ también diverge.

Teorema 3:

H) Si la integral $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ converge

T) Entonces $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ también converge, y en ese último caso la integral se dice **absolutamente convergente**.

6.8.2 – Integrales impropias de funciones con discontinuidades infinitas.

Sea *f(x)* una función continua en [*a; b*), y con una discontinuidad infinita en $x = b$. En este caso no se puede evaluar la $\int_a^b f(x)dx$, puesto que *f(x)* no es continua en el intervalo cerrado [*a; b*]. La función tiene una asíntota vertical en x = *b*, haciendo que la región sea indefinida en la dirección vertical (en las integrales con intervalo infinito la región es indefinida en la dirección horizontal). Figura 6.17

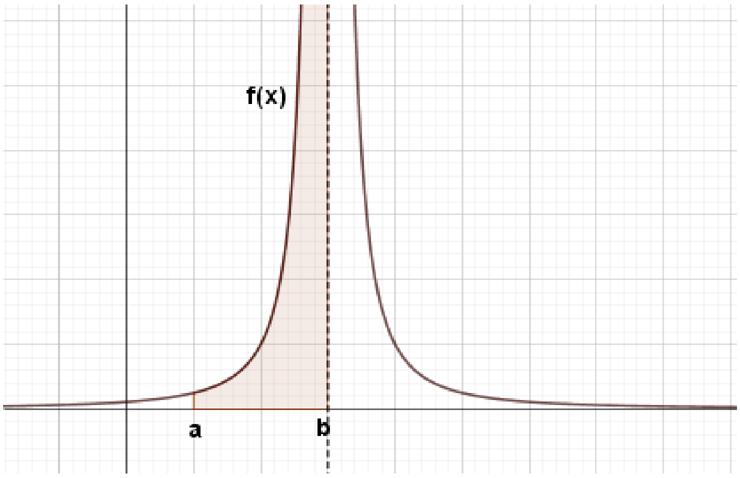


Figura 6.17

En este caso estamos en presencia de una integral impropia ya que la función tiene una discontinuidad infinita en x=b. Para calcular la integral se procede del siguiente modo:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)dx$$

Para otros puntos de discontinuidad las integrales impropias se determinan de modo análogo:

<u>Definición de Integrales Impropias con discontinuidades infinitas</u>

Caso 1. Si f es continua en el intervalo [a,b) y tiene una discontinuidad infinita en b:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$$

Caso 2. Si f es continua en el intervalo $(a,b]$ y tiene una discontinuidad infinita en a:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx$$

Caso 3. Si *f* es continua en el intervalo [a,b], excepto en algún c ∈ (a,b) en el que *f* tiene una discontinuidad infinita:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$= \lim_{c\to c1^-}\int_a^c f(x)\,dx + \lim_{c\to c1^+}\int_c^b f(x)\,dx$$

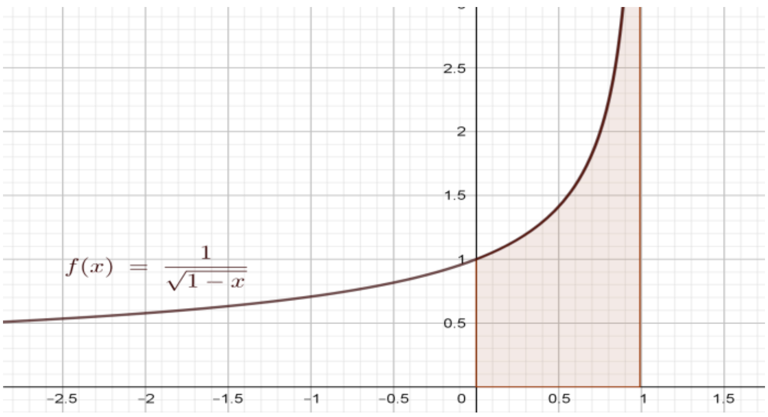
donde c es un número real arbitrario.

En los dos primeros casos la integral impropia **converge** si el límite existe y **diverge** en caso contrario. En el tercer caso, la integral impropia de la izquierda diverge si cualquiera de las integrales impropias de la derecha diverge.

Ejemplo Caso 1: Calcular $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{b\to 1^-} -2\sqrt{1-x}\Big|_0^b = \lim_{b\to 1^-}(-2)\sqrt{1-b}+2 = 2$$

El límite existe y vale 2 por lo tanto la integral impropia converge

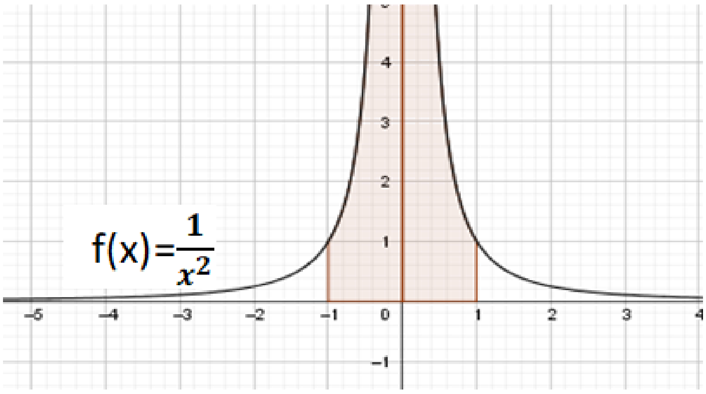


Ejemplo Caso 3: Calcular $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx$; en $x = 0$ la función presenta un punto de discontinuidad.

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx =$$

$$= \lim_{c\to 0^-}\int_{-1}^c \frac{1}{x^2}\,dx + \lim_{c\to 0^+}\int_c^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{c\to 0^-} -\frac{1}{x}\Big]_{-1}^c + \lim_{c\to 0^+} -\frac{1}{x}\Big]_c^1 = \infty + \infty = \infty$$

El límite no existe (es infinito) por lo tanto la integral impropia diverge:



Nótese que de no haber considerado la discontinuidad:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}dx = \int_{-1}^{1} x^{-2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -1-(-1) = 0 \quad \textit{resultado} \quad \textit{erroneo}$$

Para determinar la convergencia de integrales impropias de funciones con discontinuidades infinitas y calcular sus valores se pueden aplicar los siguientes teoremas de comparación:

Teorema 1: **H)** Si $f(x) \wedge g(x)$ son funciones continuas en [a,b) con discontinuidad infinita en x=b, en tanto que en todos los puntos del intervalo se verifica $0 \le f(x) \le g(x)$ y si $\int_a^b g(x)\,dx$ es convergente.

T) entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ también converge.

Teorema 2: H) Si $f(x) \wedge g(x)$ son funciones continuas en [a,b) con discontinuidad infinita en x=b, en tanto que todos los puntos del intervalo se verifica $0 \le g(x) \le f(x)$ y si $\int_a^b g(x)\,dx$ es divergente

T) Entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ también diverge.

Teorema 3: **H)** Si $f(x)$ es función continua con signo variable en [a,b) con discontinuidad infinita en x=b y además $\int_a^b |f(x)|dx$ es convergente

T) Entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ es convergente.

6.9- Aplicaciones geométricas del Cálculo Integral

Hemos visto que el límite de suma de áreas de rectángulos permitiría encontrar, bajo ciertas condiciones de la función, el área de una región plana. Ésta es sólo una de las múltiples aplicaciones de la integral definida o de Riemann. Con procedimientos similares se pueden calcular magnitudes tan distintas como longitudes de arcos, valores medios, volúmenes, centroides, trabajos y áreas de superficie de revolución. Estos conceptos tienen múltiples usos en las distintas ramas de la ingeniería.

6.9.1 - Área bajo la curva

Para calcular el área de la región comprendida entre la curva y=f(x), el eje de las abscisas y las rectas x=a y x=b se debe calcular la integral definida previamente planteada en forma adecuada:

a) **Si f(x) es no negativa (f(x) ≥ 0) en todo el intervalo cerrado [a,b]** , el valor del área comprendida entre la función f(x), el eje x y las rectas x=a y x=b (Figura 6.18) se determina de la siguiente manera:

$$Area = \int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

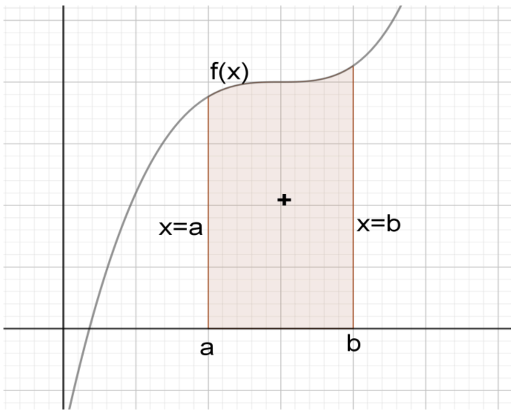


Figura 6.18

b) **Si f(x) ≤ 0 en todo el intervalo [a,b]**, para calcular el área de la región comprendida entre la función f(x), el eje x y las rectas x=a y x=b se debe tomar el valor absoluto de la integral definida de f(x), porque el resultado de la integral, bajo estas condiciones, es negativo y es sabido que el área es un valor numérico no negativo. Figura 6.19

$$Area = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| F(x) \right| \Big]_a^b = \left| F(b) - F(a) \right|$$

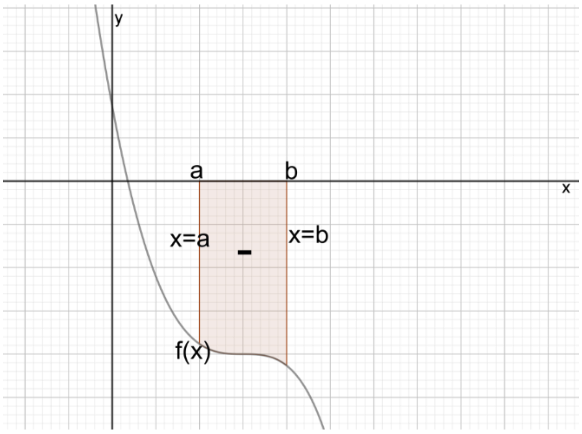


Figura 6.19

c) Si f(x) cambia de signo en el intervalo [a,b], según se muestra en la Figura siguiente:

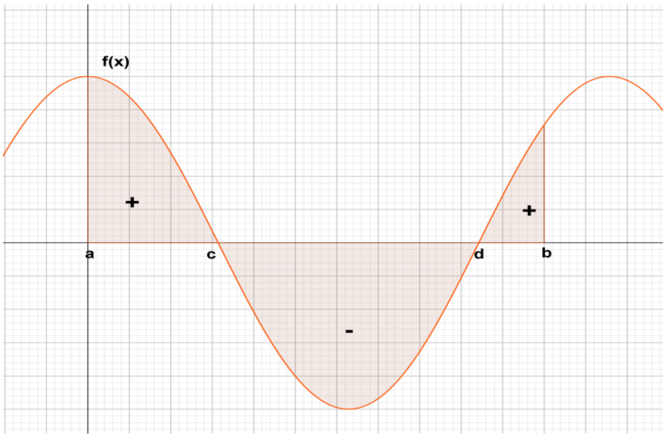


Figura 6.20

$$Area = \int_a^c f(x)\,dx + \left|\int_c^d f(x)\,dx\right| + \int_d^b f(x)\,dx$$

Ejemplo a): Hallar el área limitada por la parábola $y = x^2$, el eje x, entre $x = 2$ y $x = 4$. Figura 6.21. Aplicando la fórmula del cálculo de área resulta:

$$Area = \int_2^4 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{2^3}{3} = 18{,}67\ unidades\ de\ area$$

Utilizando software:

- **Con Geogebra,** para graficar y calcular se utiliza la siguiente sintaxis en el campo Entrada:

  Integral[x^2,2,4]

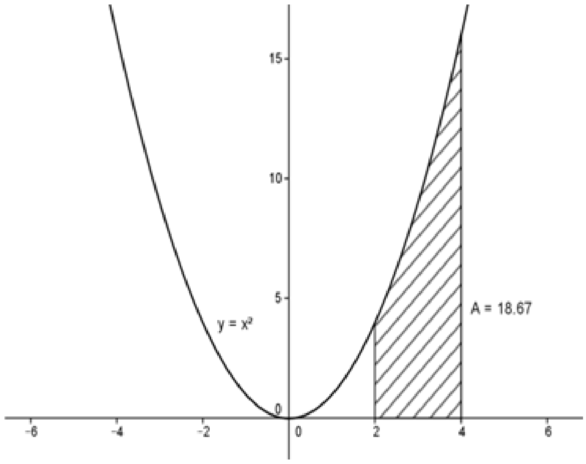


Figura 6.21

Ejemplo b): Hallar el área limitada por la curva plana de la función $f(x) = -\left(2 + \frac{x^2}{4}\right)$ y las rectas: $\begin{Bmatrix} x+3=0 \\ x-3=0 \end{Bmatrix}$

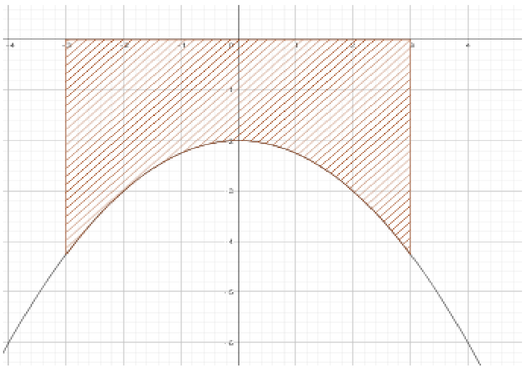


Figura 6.22

Observando la gráfica, Figura 6.22, la curva f(x) entre -3 y 3 se encuentra por debajo del eje x, generando de esa forma un valor de integral definida negativo. Por ello el valor A es el valor absoluto del resultado de la integral.

$$A = \left| \int_{-3}^{3} -2 - \frac{x^2}{4} \right| = \left| -2x - \frac{1}{4}\frac{x^3}{3} \right| \Big]_{-3}^{3} = \left| -6 - \frac{1}{12}27 - \left(-2(-3) - \frac{1}{12}(-27) \right) \right| = |-16{,}5|$$

$$Area = |-16{,}5| = 16{,}5\, unidades\, de\, area$$

Ejemplo c): Hallar el área limitada por la parábola $y = x^2 + 2x$, el eje x entre [-2,3].

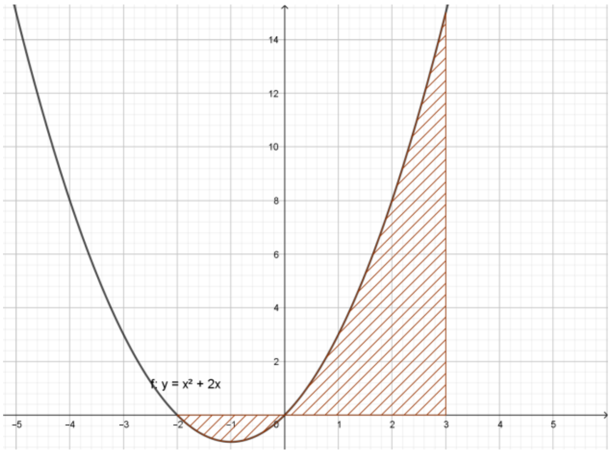


Figura 6.23

Las raíces de la función cuadrática se encuentran en x=-2 y x=0.

Como se quiere calcular el área de la región sombreada en la gráfica (Figura 6.23) es necesario plantear la suma de dos integrales, la integral de f(x) entre [-2,0] impuesta en valor absoluto ya que su resultado será negativo por encontrase la función bajo el eje de las x (A_1), más la integral de f(x) entre [0,3] (A_2)

$$Area = A_1 + A_2 = \left| \int_{-2}^{0} f(x)dx \right| + \int_{0}^{3} f(x)\, dx$$

$$A = \underbrace{\left| \int_{-2}^{0} \left(x^2 + 2x\right) dx \right|}_{A1} + \underbrace{\int_{0}^{3} \left(x^2 + 2x\right) dx}_{A2} = \left| \left[\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_{-2}^{0} \right| + \left[\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_{0}^{3} =$$

$$= \left| -\left(-\frac{8}{3} + 4 \right) \right| + \left(\frac{27}{3} + 3^2 \right) = \left| -\frac{4}{3} \right| + \frac{54}{3} = \frac{58}{3}$$

Observación importante:

El cálculo de la integral sería: I = $\int_{-2}^{3} \left(x^2 + 2x\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_{-2}^{3} = \frac{27}{3} + 9 - \left(-\frac{8}{3} + 4 \right) = \frac{50}{3}$

Como se observa el resultado de la integral no corresponde al valor del área solicitada. Observando la gráfica, la curva f(x) entre x=-2 y x=0 se encuentra por debajo del eje x, generando de esa forma un valor de integral definida negativa. Mientras entre x=0 y x= 3 el valor de la integral es positivo**.** Por ello el valor obtenido 50/3 es el de la integral, no el valor del área que es 58/3.

Si se requiere el cálculo de área, el planteo de la integral definida debe realizarse adecuadamente. Es conveniente siempre graficar la función para observar la región a calcular y recién entonces plantear la o las integrales correspondientes

Gran cantidad de problemas que se plantean en la vida real se resuelven calculando el área bajo la curva de una función.

Ejemplo: La Función espacio

El espacio recorrido a una *velocidad constante* es igual a la velocidad por el tiempo y gráficamente se interpreta como el valor que corresponde al área del rectángulo (Figura 6.24)

$$v(t) = x/t \quad \rightarrow \quad x = v.t \qquad \text{siendo } x \text{ el espacio recorrido}$$

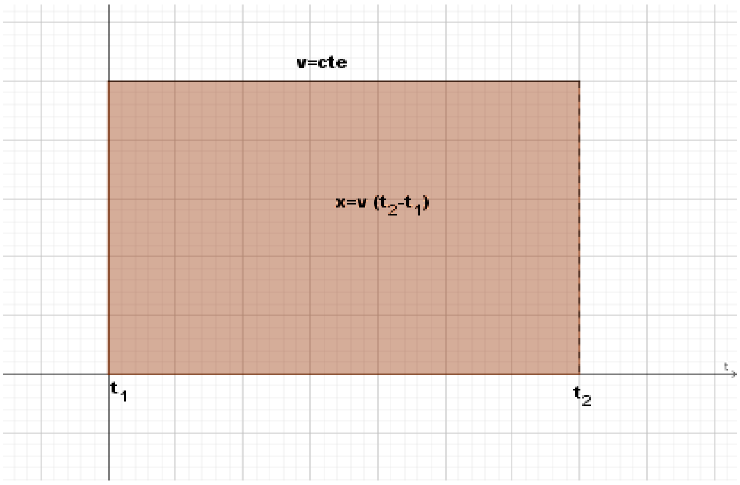


Figura 6.24

Cuando la *velocidad es variable en el tiempo*, ¿cómo se calcula el espacio recorrido en un intervalo de tiempo?

$$v(t) = x'(t) = \frac{d\,x(t)}{dt} \rightarrow \quad dx = v(t).dt \qquad \rightarrow x = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$

Corresponde al área bajo la curva según se observa en la Figura 6.25

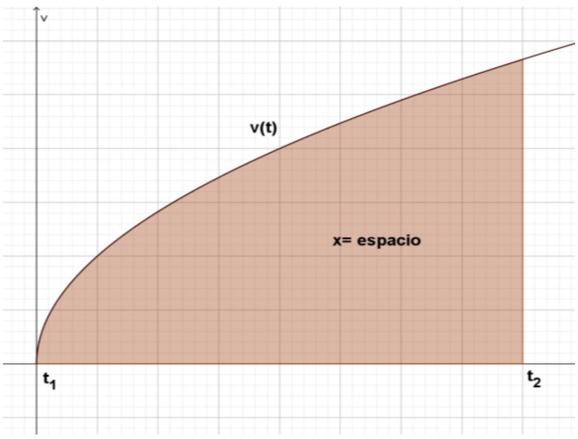
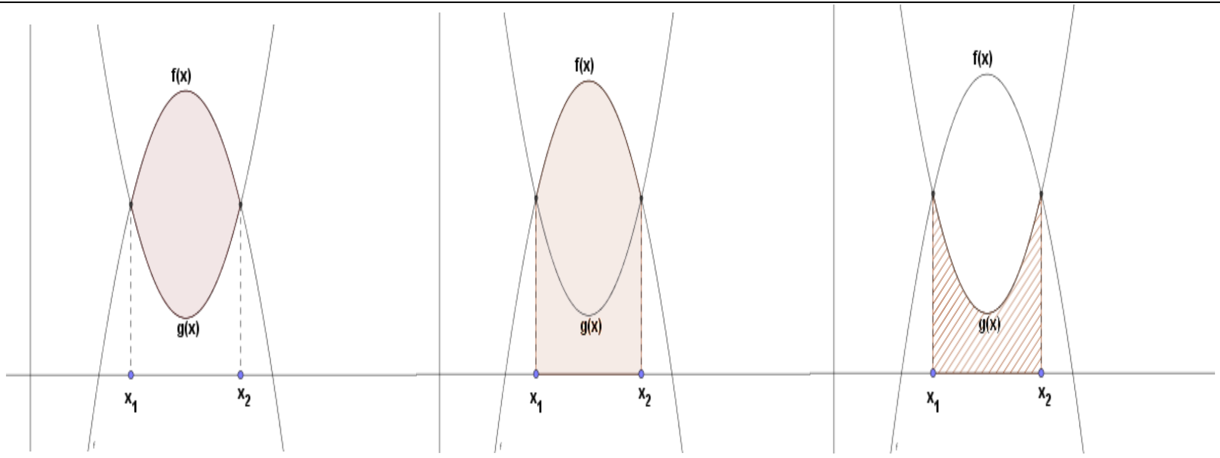


Figura 6.25

6.9.2 - Área entre dos curvas

Se puede extender la aplicación de la integral definida para calcular no solo el área *bajo la curva* sino también el área de una región comprendida *entre dos curvas*.

Sean dos curvas definidas por y = *f(x), y = g(x),* que se intersectan en dos puntos con abscisas x_1 y x_2. El área de la región que delimitan se calcula como la diferencia de las áreas bajo cada una de ellas, como se observa en la Figura 6.26. Las coordenadas de los puntos de intersección se encuentran resolviendo la ecuación *f(x)=g(x).*



$$Area\ entre\ f(x)\ y\ g(x) = Area\ de\ la\ region\ bajo\ f(x) - Area\ de\ la\ region\ bajo\ g(x)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) - g(x)\, dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx - \int_{x_1}^{x_2} g(x)\, dx$$

Figura 6.26

Área de una región entre dos curvas (Definición)

Si las funciones *f(x)* y *g(x)* son integrables en $[x_1, x_2]$ y $f(x) \geq g(x)$, entonces el área de la región limitada por las gráficas de *f (x)* y *g(x)* y las rectas verticales $x=x_1$ y $x=x_2$ es:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x) - g(x)\, dx$$

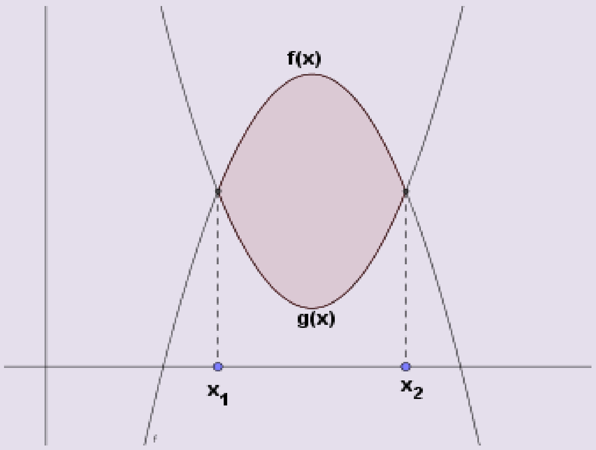


Figura 6.27

Si las curvas se cortan en varios puntos intermedios, habrá que calcular sus intersecciones y plantear las integrales necesarias, para luego sumar sus valores.

Ejemplo 1: Calcular el área comprendida entre las curvas $y = x^2$ $\quad y = +\sqrt{x}$.

La Figura 6.28 ha sido realizada con Geogebra: **IntegralEntre[sqrt(x),x^2,0,1]**

Las coordenadas de los puntos de intersección se calculan resolviendo la ecuación:

$$x^2 = \sqrt{x} \quad \rightarrow x^4 = x \rightarrow x^4 - x = 0 \rightarrow x\,(x^3 - 1) = 0$$

Que tiene las raíces reales $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$

Como $\sqrt{x} \geq x^2$ en el intervalo cerrado [0,1] el planteo de la integral es:

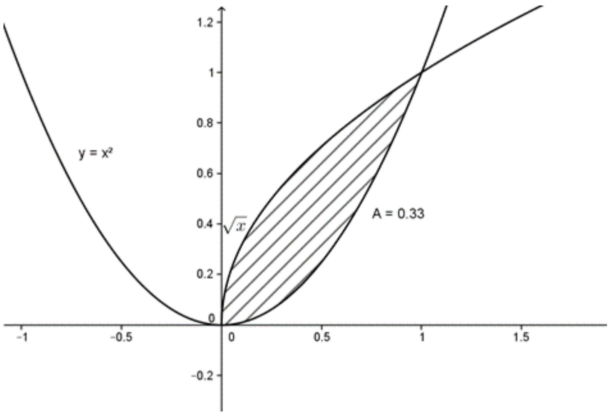


Figura 6.28

$$A = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \int_0^1 \left(x^{1/2} - x^2\right) dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\ unidades\ de\ area$$

Ejemplo 2: Calcular el área encerrada por las curvas $y^2 = x$ $\quad x - y = 2$ las cuales se pueden escribir así: $\begin{cases} y = \pm\sqrt{x} \\ y = x - 2 \end{cases}$

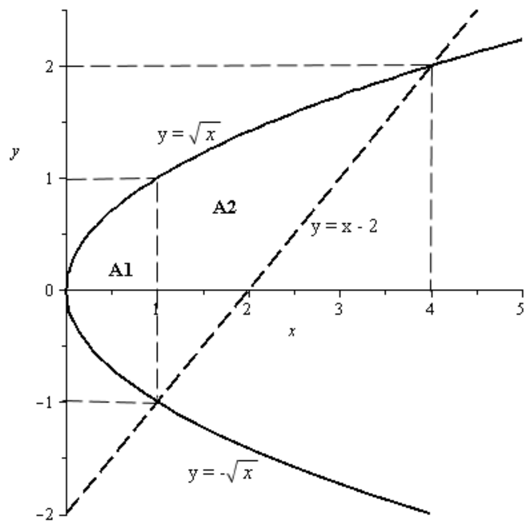


Figura 6.29

Observando la Figura 6.29 se debe dividir la región en dos porciones, A1 y A2.

El área A1 se determina como la región comprendida entre las funciones $\begin{cases} y = +\sqrt{x} \\ y = -\sqrt{x} \end{cases}$

El área A2 se determina como la región comprendida entre las funciones $\begin{cases} y = +\sqrt{x} \\ y = x - 2 \end{cases}$

Este ejemplo muestra la importancia de realizar la gráfica de las funciones, de tal modo de determinar la región que se desea calcular y realizar el planteo adecuado de la integral para calcular el área buscada. El área es A = A1 + A2.

El planteo es:

$$A = \underbrace{\int_0^1 [\sqrt{x} - (-\sqrt{x})]dx}_{A1} + \underbrace{\int_1^4 [\sqrt{x} - (x-2)]dx}_{A2} = \int_0^1 2\sqrt{x}\,dx + \int_1^4 \sqrt{x} - x + 2\,dx = 9/2$$

El valor del área es 9/2 unidades de área.

Los límites de integración x=1 y x=4 resultan de la intersección de las funciones. El valor x = 1 del punto de intersección separa a la izquierda y derecha las dos porciones de área a considerar.

Ejemplo 3: Hallar el área limitada por las curvas: $\begin{cases} f(x) = x + 4 \\ g(x) = x^2 - 2 \end{cases}$

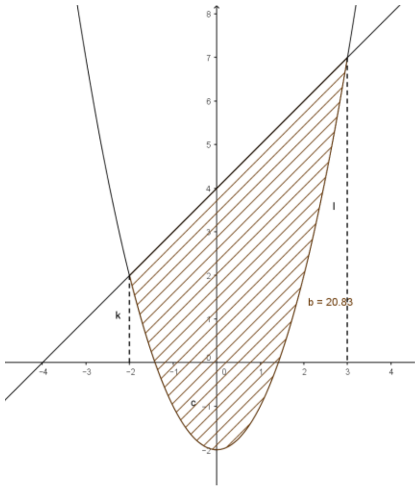


Figura 6.30

Para encontrar los puntos de intersección entre las funciones se plantea la condición *f(x)=g(x)*. estos puntos son los valores de los límites de integración.

$$x+4=x^2-2$$
$$x^2-x-6=0$$

Aplicando la fórmula para resolver la ecuación de segundo grado:

$$X_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\left\{\begin{array}{l} x_1=\frac{1+5}{2}=3 \\ x_2=\frac{1-5}{2}=-2 \end{array}\right\}$$

A continuación, se plantea la integral de acuerdo al concepto: $A=\int_{x_1}^{x_2} f(x)-g(x)\,dx$

$$A=\int_{-2}^{3}\left[(x+4)-\left(x^2-2\right)\right]dx=\int_{-2}^{3}\left[-x^2+x+6\right]dx$$
$$=-\int_{-2}^{3}x^2dx+\int_{-2}^{3}xdx+6\int_{-2}^{3}dx=-\frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-2}^{3}+\frac{1}{2}\left[x^2\right]_{-2}^{3}+6\left[x\right]_{-2}^{3}=$$
$$=-\frac{1}{3}[27+8]+\frac{1}{2}[9-4]+6[3+2]=20,833$$
$$A=20,833$$

Observar que en el cálculo de área entre dos curvas no se modifica el planteo ni el valor del área por el hecho de que parte de ella esté por debajo del eje x.

6.9.3 - Valor medio o Promedio de una función.

Calcular el promedio de una cantidad finita de números es una tarea sencilla. Supongamos n números $y1, y2\ \dots\dots.yn$, el valor promedio es:

$$y_{prom} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots\ldots\ldots. + y_n}{n}$$

Pero: ¿cómo calcular el valor promedio si hay una cantidad infinita de valores? ¿Cómo calcular el valor promedio de una función en un intervalo acotado? Este concepto es otro de los usos prácticos de las integrales definidas para representar procesos de sumas.

Al valor *f(c)*, definido en el *teorema del valor medio para integrales*, punto 6.4, se lo denomina valor medio o valor promedio de la función *f(x)*.

Definición del valor medio de una función:

Si *f(x)* es integrable en [a;b], entonces el valor medio de f(x) en el intervalo [a,b] se define como

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

La interpretación geométrica del valor medio de una función (Figura 6.31) es que, *cuando la función es no negativa*, hay un valor de imagen f(c), siendo $a \leq c \leq b$, que representa la altura de un rectángulo de base b-a. El área de dicho rectángulo es igual al área bajo la curva de la función en el intervalo [a,b].

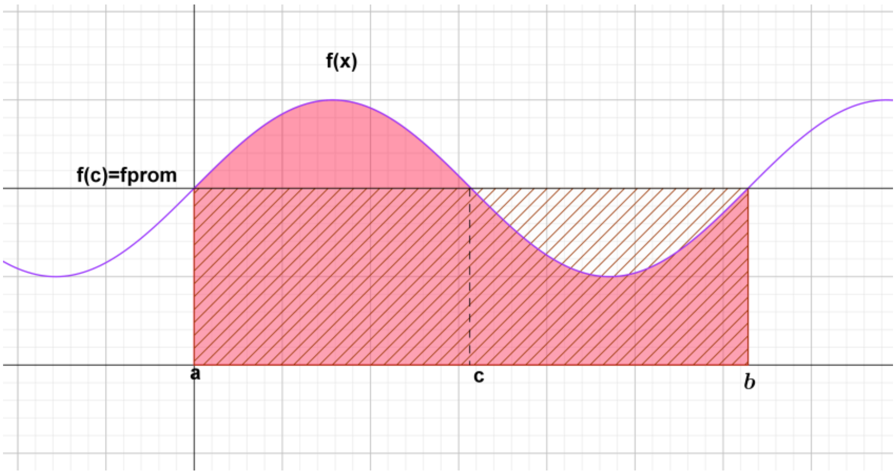


Figura 6.31

Ejemplo:

El Volumen V en litros del aire en los pulmones durante un ciclo respiratorio de 5 segundos viene dado aproximadamente por el modelo:

$$V = 0{,}1729\,t + 0{,}1522\,t2 - 0{,}0374\,t3$$

Donde t es el tiempo en segundos.

Calcular el **volumen medio de aire en los pulmones a lo largo de un ciclo**:

$$Vm = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} V(t)dt$$

$$Vm = \frac{1}{5-0}\int_{0}^{5} 0{,}1729\,\mathrm{t} + 0{,}1522\,\mathrm{t}^2 - 0{,}0374\,\mathrm{t}^3\, dt$$

$$= \frac{1}{5}\left(0{,}1729\frac{t^2}{2} + 0{,}1522\frac{t^3}{3} - 0{,}0374\frac{t^4}{4}\right)\Big]_0^5 = 0{,}5318\, litros\, de\, aire$$

6.9.4 - Volúmenes de sólidos de revolución.

Se designa por V el volumen del sólido engendrado haciendo girar un recinto plano alrededor de un eje, Figura 6.32. El recinto plano se delimita entre $y = f(x)$, las rectas x = a , x = b e y = 0 (eje x).

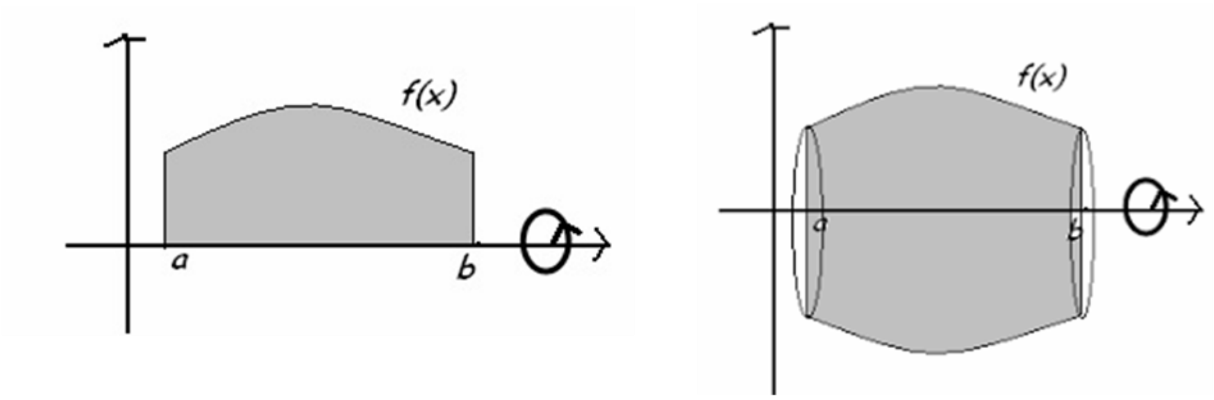
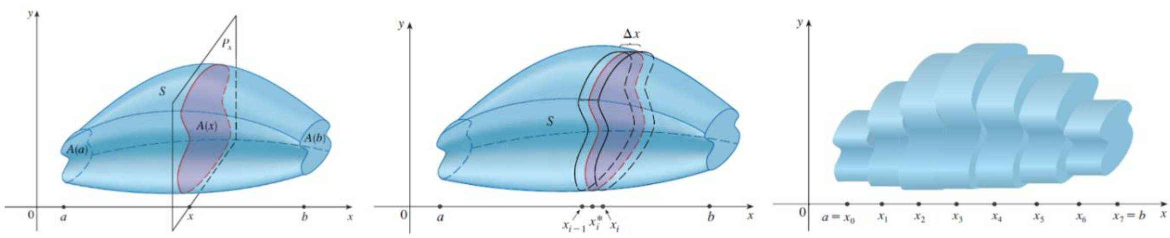


Figura 6.32

El volumen V viene dado por la fórmula: $\boxed{V = \pi \int_a^b y^2 dx}$



Deducción de la expresión de Volumen

Dada $y = f(x)$ continua en el intervalo [a,b], define el recinto ABCD, Figura 6.33

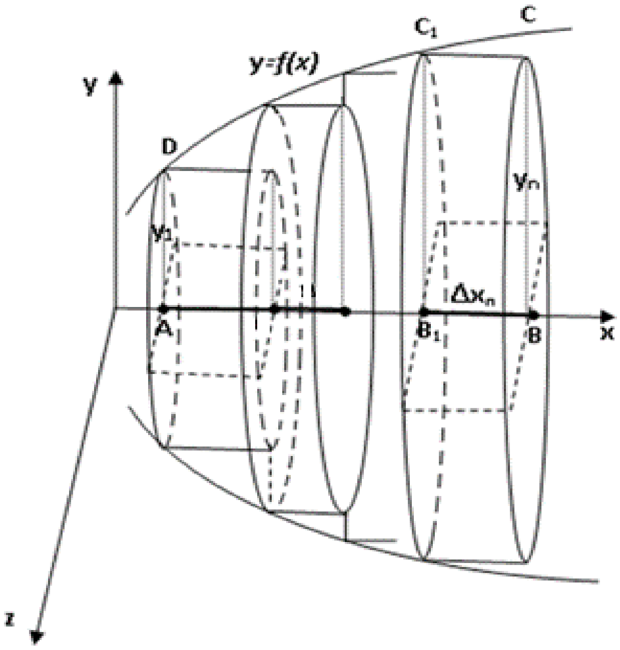


Figura 6.33

Para obtener la expresión de V se realizan los siguientes pasos:

1. Se realiza la partición del segmento AB, correspondiente al intervalo [a,b], en n partes, cuyas longitudes sean :$\Delta x_1, \Delta x_2,\dots,\Delta x_n$.
2. Dentro del recinto ABCD se construyen rectángulos con las bases $\Delta x_1, \Delta x_2,\dots,\Delta x_n$, y alturas $y_i = f(c_i)$.
3. Se hace girar el recinto ABCD alrededor del eje x por lo que cada rectángulo engendra un cilindro de revolución. El volumen de cada cilindro es

$$\Delta V_i = Sup_{base}.altura = \pi\ f^2_{(Ci)}\ \Delta x_i = \pi\ y_i^2\ \Delta x_i$$

   El volumen del cilindro engendrado por el rectángulo BB_1CC_1 será: $\pi\, y_n^2\, \Delta x_n$ La suma de los volúmenes de todos estos cilindros es:

$$V_{aproximado} = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \pi\ y_1^2\ \Delta x_1 + \pi\ y_2^2\ \Delta x_2 + \dots\dots\dots\dots + \pi\ y_n^2\ \Delta x_n$$

$$V_{aproximado} = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi\ y_i^2\ \Delta x_i$$

4. El límite de la suma de los volúmenes de estos n cilindros, para la norma de la partición tendiendo a cero ($\|P\| \to 0$), conduce al límite para $n \to \infty$ y es el volumen buscado

$$V = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi\ y_i^2\ \Delta x_i = V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

Siendo **V el volumen del sólido de revolución generado al hacer girar la región comprendida entre la función y el eje x en el intervalo [a,b]**

Ejemplo 1: Calcular el volumen del sólido de revolución, generado por la rotación alrededor del eje x, de la región formada entre $y = x^2 + 2$ y el eje x en el intervalo [-4,4]

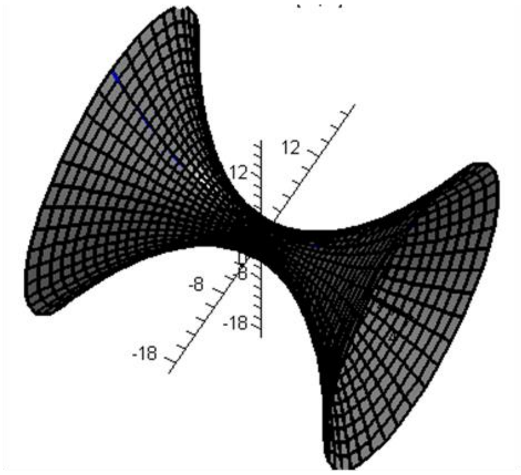


Figura 6.34

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx = \pi \int_{-4}^{4} \left(x^2 + 2\right)^2 dx = \pi \int_{-4}^{4} \left(x^4 + 4x^2 + 4\right) dx = \frac{\pi}{5}\left[x^5\right]_{-4}^{4} + \frac{4\pi}{3}\left[x^3\right]_{-4}^{4} + 4\left[x\right]_{-4}^{4} =$$

$$= \frac{\pi}{5}\left[1024 + 1024\right] + \frac{4\pi}{3}\left[64 + 64\right] + 4\left[4 + 4\right]$$

$$V = \frac{9184}{15}\pi, \text{ o bien } V = 1923,49\pi$$

Ejemplo 2: Calcular el volumen del sólido engendrado al hacer girar las regiones conformadas por las siguientes funciones alrededor del eje x:

$$f(x) = \begin{cases} 2 \text{ en el intervalos } \left[0,3\right] \\ 5 \text{ en el intervalos } \left[3,9\right] \end{cases}$$

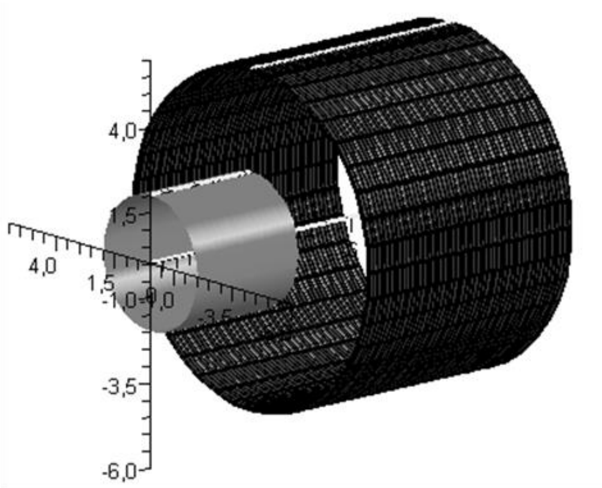


Figura 6.35

$$V=\pi\int_0^3 2^2\,dx+\pi\int_3^9 5^2\,dx=4\pi[x]_0^3+25\pi[x]_3^9=4\pi[3-0]+25\pi[9-3]=12\pi+150\pi=162\pi$$

El valor es 162π unidades de volumen.

$\pi\pi$

Ejemplo 3: Encontrar el volumen del sólido obtenido por rotación de la región formada entre las curvas $f(x)=\frac{x}{2}$ e $y^2=x$, alrededor del eje x. Observar que la forma que engendra esta región es una típica forma de parlante. Se rota una recta alrededor del eje x, lo cual genera un cono que encierra cierto volumen. También se rota una parábola alrededor del mismo eje, acción que engendra un paraboloide de revolución. Ver Figura 6.36

Ambas superficies se intersecan y determinan un volumen, que es el que se quiere calcular. Ver Figura 6.37. Se obtienen los puntos de intersección de las curvas: x = 0, x = 4

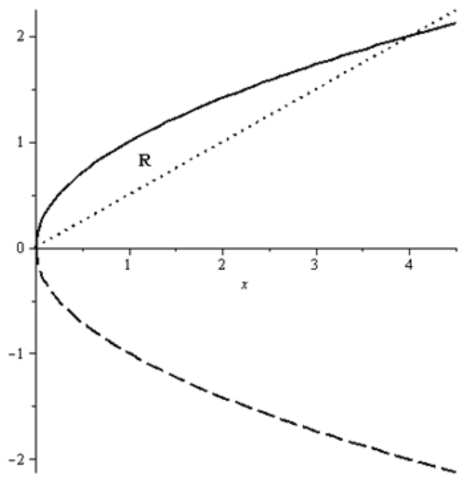


Figura 6.36

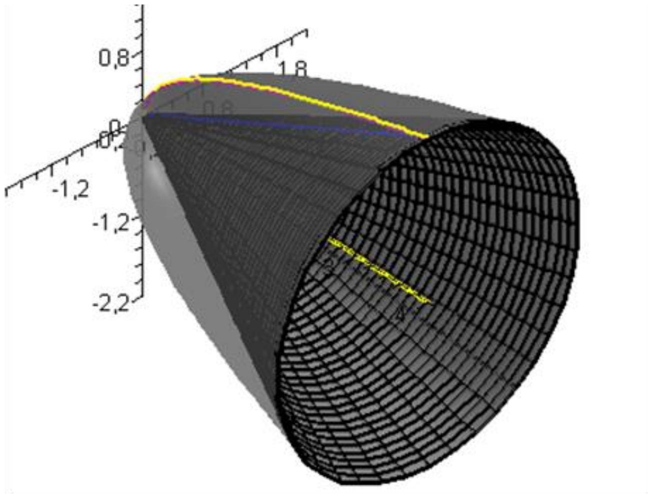


Figura 6.37

$$V=\pi\int_0^4\left(x-\frac{x^2}{4}\right)dx=\pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{12}\right)\Bigg|\begin{matrix}4\\0\end{matrix}=\frac{8}{3}\pi\ unidades\ de\ volumen$$

6.9.5 - Longitud de un arco de curva.

¿Cómo calcular la longitud de una curva? Si la curva es un polígono, simplemente se suman las longitudes de todos los segmentos de recta que forma el polígono y se determina la longitud. Se va a definir la longitud de una curva general "L" aproximándola a una suma de segmentos de polígonos y luego tomando el límite de esa suma cuando el número de segmentos de polígonos inscriptos en el arco aumenta indefinidamente.

Una curva se denomina **rectificable** cuando tiene longitud finita. La condición suficiente para que la gráfica de una f(x) sea una curva suave (sin puntas o quiebres) entre los puntos (a,f(a)) y (b,f(b)) es que su derivada f'(x) sea continua en el intervalo [a,b]. Tal función se dice derivable con continuidad en [a,b] y que su gráfica en el intervalo es una **curva suave**.

Se supone la función *f(x)* derivable con continuidad en el intervalo [a,b], se denota como "L" la longitud de su gráfica en este intervalo.

Se realiza la partición P $\rightarrow\ a = x0 < x1 < x2 < \ldots\ldots\ldots\ldots < xn = b,$ como muestra la Figura 6.41, siendo $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$

Se aproxima la longitud de arco L como la suma de las hipotenusas ΔL_i de cada uno de los polígonos inscriptos en el arco, que corresponden a triángulos rectángulos de catetos $\Delta x_i\ y\ \Delta y_i$.

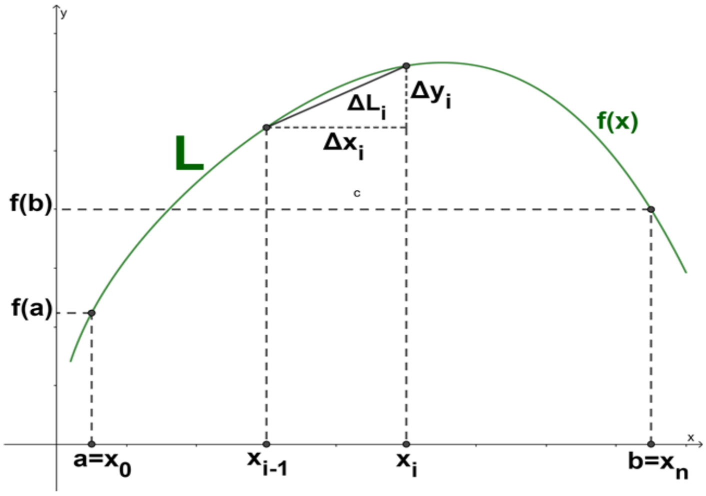


Figura 6.38

$$L \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$$

$$L = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i$$

$$= \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$$

$$= \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x_i^2 \ (1 + \frac{\Delta y_i^2}{\Delta x_i^2})}$$

$$= \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \ \ \Delta x_i \qquad (1)$$

El teorema de Lagrange garantiza un valor c_i en el intervalo (x_{i-1}, x_i), tal que:

$$f'_{(c_i)} \quad = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$$

Entonces, La expresión (1) se reescribe como :

$$= \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'_{(ci)}\right)^2} \ \ \Delta x_i$$

Puesto que $f'_{(x)}$ es continua en [a,b] , sabemos que $\sqrt{1 + \left(f'_{(x)}\right)^2}$ es también continua y por lo tanto integrable en [a,b], podemos asegurar que:

$$L = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'_{(ci)}\right)^2} \ \ \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'_{(x)})^2} \ dx$$

$$L \ = \int_a^b \sqrt{1 + (f'_{(x)})^2} \ dx$$

Siendo **L la longitud de arco de la función f(x) entre (a,f(a)) y (b,f(b))**

Las integrales definidas que calculan longitudes de arco son, por lo general, difíciles de calcular analíticamente. Veremos algunos ejemplos

Ejemplo 1: Un cable eléctrico soportado por dos postes distante 61 metros adopta la forma de una catenaria de ecuación: $y = 45\left(e^{x/90} + e^{-x/90}\right) = 45\ ch\ \frac{x}{90}$

Calcule la longitud del cable

Esta función es una función coseno hiperbólico, y representa la situación real de un cable uniforme, flexible e inextensible que se suspende de dos puntos fijos, y forma, sujeto a su propio peso, una curva llamada catenaria. Este caso se presenta con frecuencia al calcular la longitud de los cables de alta tensión, que se encuentran suspendidos entre tramo y tramo de dos puntos fijos, ubicados en las torres de alta tensión. Para calcular la longitud se procede así:

$y' = \frac{1}{2}\left(e^{x/90} - e^{-x/90}\right)$

$1 + (y')^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{90}} - e^{-\frac{x}{90}}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(e^{x/45} - 2 + e^{-x/45}\right) = 1 + \frac{1}{4}e^{x/45} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-x/45} = \frac{1}{4}e^{x/45} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-x/45} = \left[\frac{1}{2}\left(e^{x/90} + e^{-x/90}\right)\right]^2$

$$L = \int_0^{60} \sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(e^{x/90} + e^{-x/90}\right)\right]^2}\, dx = \int_0^{60} \frac{1}{2}\left(e^{x/90} + e^{-x/90}\right) dx =$$

$$L = \left[45\left(e^{x/90} - e^{-x/90}\right)\right]_0^{60} = 65{,}78 \text{ metros}$$

La longitud del cable sostenido por dos postes distantes 61 metros es de 65,78 metros.

Ejemplo 2: Determine la longitud de arco para la curva $y = x^2 - \frac{\ln x}{8}$ en el intervalo [1,4] (ver Figura 6.42)

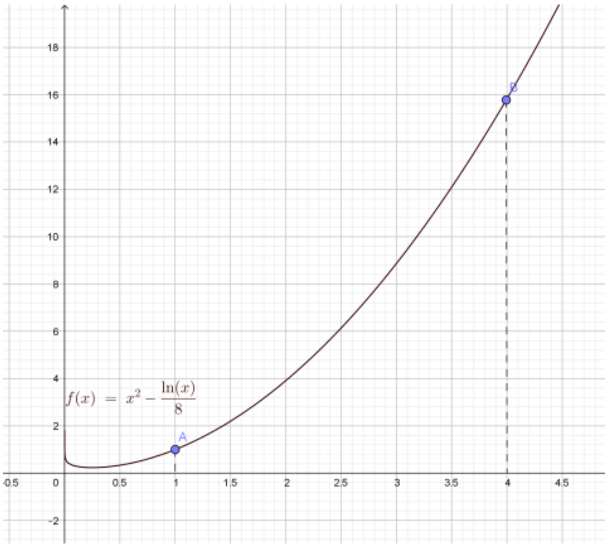


Figura 6.39

$$f(x)' = 2x - \frac{1}{8x}$$

$$1 + (f(x)')^2 = 1 + (2x - \tfrac{1}{8x})^2 = 1 + 4x^2 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{64x^2} = 4x^2 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{64x^2}$$

$$1 + (f(x)')^2 = \left(2x + \frac{1}{8x}\right)^2$$

$$L = \int_1^4 \sqrt{\left(2x + \frac{1}{8x}\right)^2}\ dx = \int_1^4 \left(2x + \frac{1}{8x}\right) dx$$

$$L = \left[x^2 + \frac{1}{8}\ln x\right]_1^4 = 16 + \frac{1}{8}\ln 4 - (1 + \frac{1}{8}\ln 1) = 15{,}17\ unidades\ de\ longitud$$

6.9.6 - Áreas de superficies de revolución.

Si se hace girar la gráfica de una función continua en torno a una recta, la superficie resultante se llama superficie de revolución.

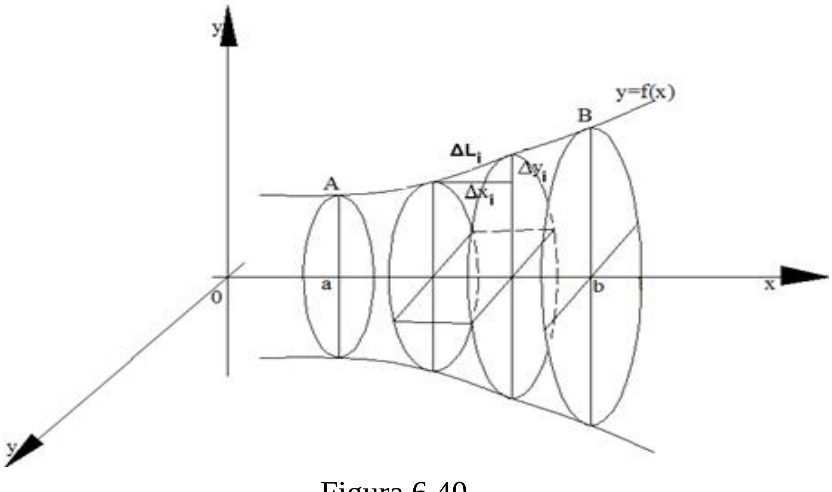


Figura 6.40

El área de la superficie generada por la rotación del arco AB de una curva continua alrededor de una recta situada en su plano es, por definición, el límite de las sumas de las áreas generadas por las n cuerdas ΔL_i en la rotación en torno a dicha recta. El número de cuerdas inscriptas se hace crecer indefinidamente, cuidando que la mayor longitud de ellas (la norma) tienda a cero.

Sea P la partición de [a,b], con subintervalos de longitud Δx_i. Entonces la longitud de arco en cada subintervalo es:

$$\Delta L_i = \sqrt{1 + \left(f'_{(c_i)}\right)^2}\,\Delta x_i$$

Al girar ese segmento ΔL_i alrededor del eje x genera un tronco de cono circular recto cuya superficie ΔS_i será:

$$\Delta S_i = 2\pi r_i . \Delta L_i$$

Siendo r_i la distancia entre la gráfica y el eje de revolución.

Por lo tanto si A y B son dos puntos de la curva $y = f(x)$, siendo $f(x)$ y $f'(x)$ continuas y además, $f(x)$ no cambia de signo en el intervalo $a < x < b$, el área de la superficie generada por la rotación del arco AB, alrededor del eje x viene dada por:

$$A_{SR} = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i =$$

$$A_{SR} = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi\; r_i \sqrt{1 + \left(f'_{(c_i)}\right)^2}\,\Delta x_i \qquad (1)$$

Si el giro es alrededor del eje x, entonces $r_i=f(c_i)$ en (1), que es la distancia entre la función y el eje de revolución x.

$$A_{SR} = 2\pi \int_a^b y . \sqrt{1 + \left(f'_{(x)}\right)^2}\, dx$$

Si el giro es alrededor del eje y entre $[y_1,y_2]$, el área de la superficie de revolución se calcula como:

$$A_{SR} = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} x . \sqrt{1 + \left(g'_{(y)}\right)^2}\, dy$$

siendo x: la distancia entre la gráfica y el eje de revolución "y"

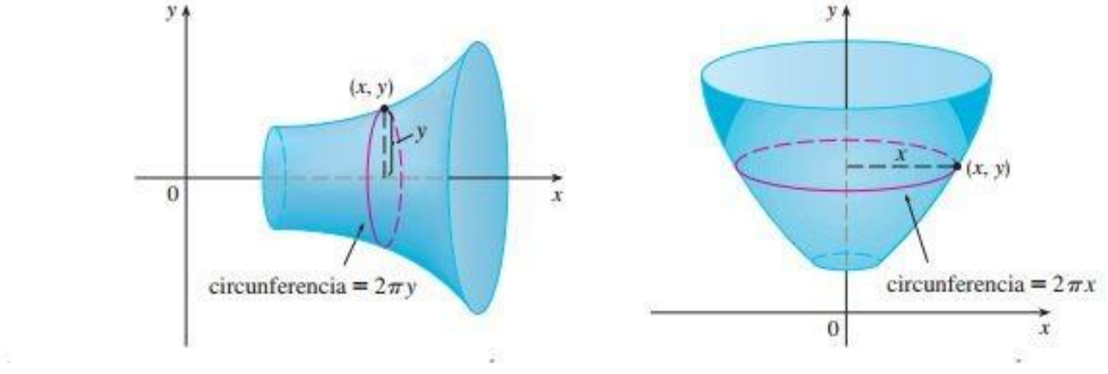


Figura 6.41

Ejemplo 1: Calcular el área de la superficie esférica generada por la rotación de la circunferencia de radio 3 , $x^2 + y^2 = 9$, alrededor del eje x.

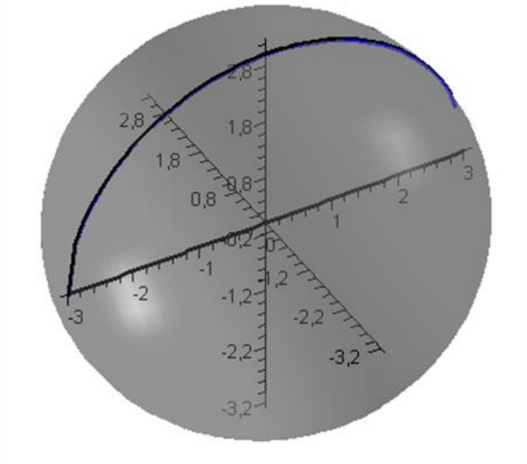


Figura 6.42

$$y = \sqrt{9 - x^2} \rightarrow y' = \frac{1}{2}\left(9 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-2x\right) = -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}} = -\frac{x}{y}$$

$$A_{SR} = 2\pi \int_{-3}^{3} y.\sqrt{1 + \left(-\frac{x}{y}\right)^2}\,dx = 2\pi \int_{-3}^{3} y\sqrt{\frac{y^2 + x^2}{y^2}}\,dx$$

$$A_{SR} = 2\pi \int_{-3}^{3} \sqrt{y^2 + x^2}\,dx = 2\pi \int_{-3}^{3} \sqrt{9}\,dx$$

$$A_{SR} = 2\pi 3\, x\Big]_{-3}^{3} = 6\pi(3+3) = 36\pi \text{ unidades de area}$$

Ejemplo 2: Calcular el área del cono de revolución generado por la rotación de la recta: $y - 2x + 2 = 0$ alrededor del eje y, entre $y_1 = -2$; $y_2 = 4$.

Este caso es particular, ya que el eje de simetría del cono es *y*, por lo tanto debe considerarse *y* como variable independiente. La fórmula del área queda: $A = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} x\sqrt{1 + \left(x`\right)^2}\,dy$

Donde se debe tener en cuenta que: $y - 2x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}\left(y + 2\right) \rightarrow x' = \frac{1}{2}$.

Luego, reemplazando:

$$A = 2\pi \int_{-2}^{4} \frac{1}{2}\left(y + 2\right)\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}\,dy = \pi\sqrt{\frac{5}{4}} \int_{-2}^{4} \left(y + 2\right)dy = \pi\sqrt{\frac{5}{4}} \int_{-2}^{4} y\,dy + 2\pi\sqrt{\frac{5}{4}} \int_{-2}^{4} dy =$$

$$\frac{\pi\sqrt{5}}{2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-2}^{4} + \pi\sqrt{5}\left[y\right]_{-2}^{4} = \frac{\pi\sqrt{5}}{2}\left[8 - 2\right] + \pi\sqrt{5}\left[4 + 2\right] =$$

$$A = 20{,}12\pi$$

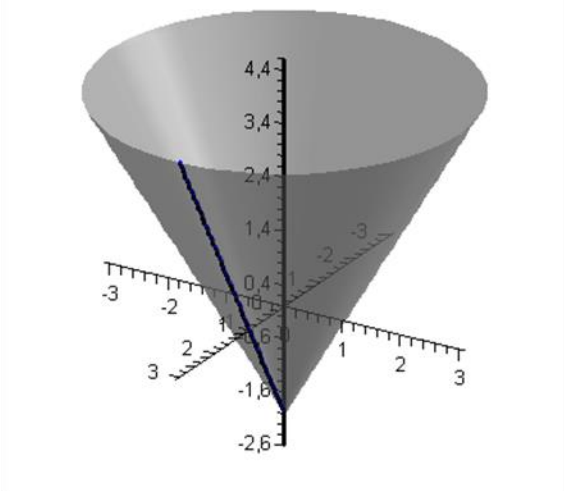


Figura 6.43