MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACIÓN
Universidad Nacional de San Juan

FACULTAD DE INGENIERÍA

Departamento de Matemática

Cátedra: CÁLCULO I – ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Autoría: Equipo de cátedra - 2023

TEMA 7

SUCESIONES Y SERIES

7.1-Sucesión numérica real

La experiencia cotidiana brinda un significado intuitivo de la noción de una sucesión. Las palabras sucesión de eventos o sucesión de números sugiere un arreglo en el que los eventos E o los números n se establecen en algún orden: E1, E2, E3, . . . o n1, n2, n3, . . ., es decir hay un primer evento o primer número identificado, un segundo evento o segundo número, etc.

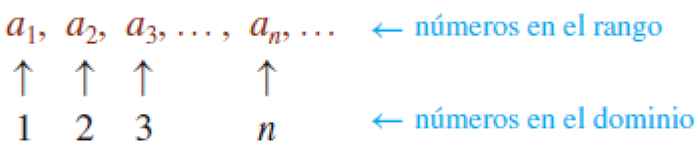
Cualquier estudiante de matemáticas también está familiarizado con el hecho de que cualquier número real puede escribirse como un decimal. Por ejemplo, el número racional 1/3 = 0,333… donde los tres puntos significan que los tres dígitos se repiten eternamente. Esto quiere decir que el decimal 0.333… es una suma infinita o la serie infinita. En este tema estudiaremos los conceptos de sucesión y de serie infinita.

7.1.1 Definición

Una sucesión se puede considerar como una lista o colección de números escritos en un orden definido: $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$ Observe que por cada entero positivo n, hay un número correspondiente a_n , por tanto, una sucesión se puede definir como una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos.

Sucesión numérica es una función real, cuyo dominio es el conjunto de los números naturales.

$$\{\boldsymbol{a_n}\}: \boldsymbol{N} \rightarrow \boldsymbol{R}$$



7.1.2 Notación

Usualmente se hace referencia, simbólicamente, a una sucesión usando la notación $\{a_n\}$, o sea, utilizando el término genérico encerrado entre llaves (o entre paréntesis), o simplemente mediante su elemento enésimo general $\boldsymbol{a_n}$ en lugar de $a_{(n)}$**.**

Se suelen escribir los elementos que forman una sucesión subindicándolos con los números naturales, correspondientes a la posición del elemento en la sucesión. Para significar o dar a entender que se extiende indefinidamente se ponen puntos suspensivos al final. Esto no debe obviarse.

$$a_1; \; a_2; \; a_3; \; a_4; \ldots a_n; \; a_{n+1}; \; \ldots$$

La dependencia de los "$\boldsymbol{a_n}$" respecto de **"$\boldsymbol{n}$"** puede ser definida por cualquier ley, y en particular los valores de "$\boldsymbol{a_n}$" no tienen por qué ser distintos unos de otros. Las sucesiones se pueden definir mediante una fórmula para el n-ésimo termino, llamado **término general de la sucesión.**

Si se desea obtener los primeros n términos de una sucesión, simplemente debe reemplazarse los elementos del conjunto de los naturales en forma ordenada en el **término general de la sucesión.**

Ejemplo: Dada la sucesión $\boldsymbol{a_n = \frac{3^n}{n}}$, encontrar los primeros cinco términos de la sucesión:

$$a_1 = 3; \; a_2 = \frac{9}{2}; \; a_3 = 9; \; a_4 = \frac{81}{4}; a_5 = \frac{243}{5}$$

En situaciones es necesario <u>determinar si una lista ordenada de números obtenidos en relación a números naturales, responde a una ley general</u>, es decir, se busca determinar si esa lista ordenada

Ejemplo: Determinar, si es posible, la expresión de una sucesión cuyos primeros términos son:

$$2;\ \frac{4}{3};\ \frac{8}{5};\frac{16}{7};\frac{32}{9};\ ....$$

Si se trabaja el numerador y el denominador por separado, puede observarse dos reglas:

- Los numeradores son potencias sucesivas de 2: $2^1; 2^2; 2^3; 2^4; 2^5; \dots ; 2^n; \dots$
- Los denominadores son naturales impares. $1; 3; 5; 7; 9; \dots ; 2n-1; \dots$

Por ello, la lista corresponde a una sucesión cuyo expresión genral es: $a_n = \frac{2^n}{2n-1}$

Nota: En adelante, para hacer referencia a determinada sucesión, se utilizará indistintamente una de las tres notaciones simbólicas siguientes: a_n ; (a_n) *o* $\{a_n\}$.

7.1.3 Representación gráfica

Como una sucesión es una función admite una representación gráfica. Las sucesiones son representadas gráficamente por puntos aislados, ya sea en el plano o en la recta real, en correspondencia con la sucesión de números naturales, que son el dominio de estas funciones. Para facilitar la comprensión de este concepto se verán algunos ejemplos:

Ejemplo: Considérese la sucesión: $\boldsymbol{a_n = \frac{1}{n}}$; o sea **:** $1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{5};\dots;\frac{1}{n};\frac{1}{n+1};\dots$ Al graficar se obtiene:

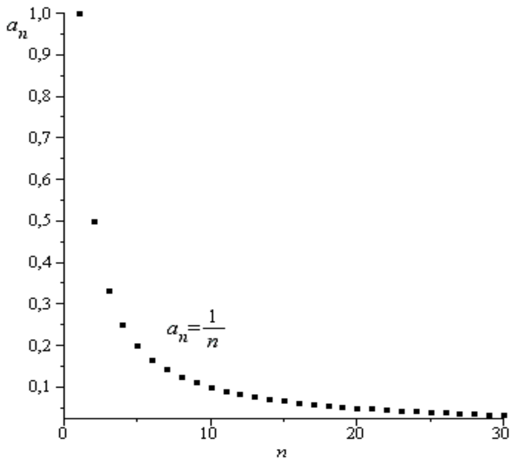


Figura 7.1 Representación en el plano

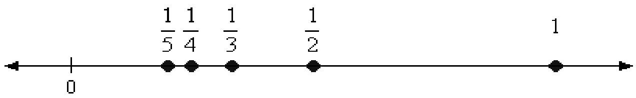


Figura 7.2 representación en la recta numérica

A partir de estas representaciones se pueden observar:

- Ningún elemento de esta sucesión es cero; pero, conforme el número *n* crece, a_n se aproxima a cero con carácter decreciente y monótono.

- A partir de un determinado elemento todos los números a_n se encuentran dentro de un intervalo centrado en cero, no importa cuán pequeño sea éste.
- Al representar los elementos a_n en la recta real se observa que los puntos se "*apiñan*" o "*acumulan*" a medida que se acercan a cero, conforme *n* crece, entonces la distancia entre dos elementos consecutivos disminuye a medida que *n* crece.

Estas situaciones observadas derivan en expresar que si *n* crece los números a_n "tienden a cero"ó que poseen <u>limite cero</u>, ó bien que: ¨ la sucesión $a_1; a_2; a_3; a_4; \ldots\ldots\ldots; a_n; \ldots$ converge a cero¨.

Ejemplo: Considérese la sucesión: $\boldsymbol{a_n = \frac{(-1)^n}{n}}$**;** o sea : $-1;\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{5}; \ldots; \pm\frac{1}{n}; \mp\frac{1}{n+1}; \ldots$

Al graficar se obtiene:

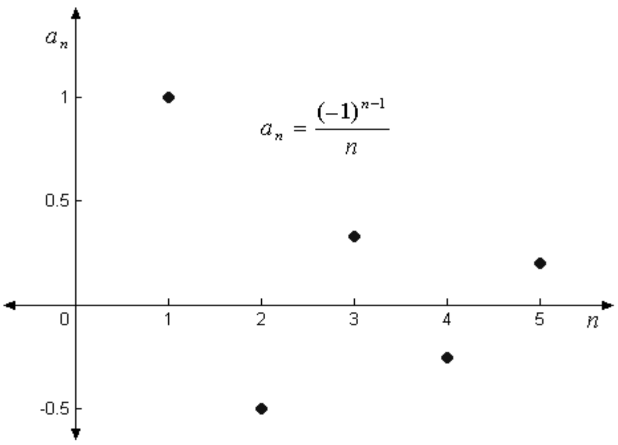


Figura 7.3

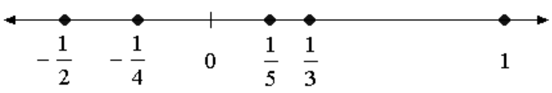


Figura 7.4

También aquí, los números a_n tienden a cero, cuando *n* crece. La diferencia es que los elementos a_n no tienden de manera monótona, sino que son a veces mayores y a veces menores que el límite cero; se dice entonces que la sucesión *alterna* sus valores en torno al valor al que tiende. La convergencia de la sucesión a cero se expresa simbólicamente por: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ó bien ocasionalmente por la notación abreviada $a_n \to 0$.

Ejemplo: Considérese la sucesión: $a_n = \frac{n^2+1}{n+1}$, cuyos primeros valores son: $1;\ \frac{5}{3};\ \frac{5}{2};\ \frac{9}{4};\ \frac{11}{5}; \ldots$

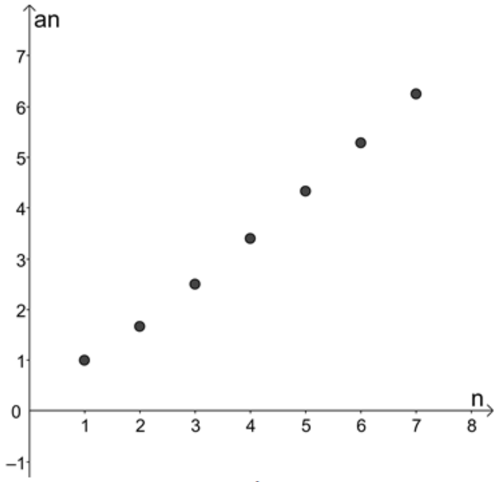


Figura 7.5

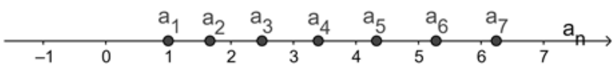


Figura 7.6

Los valores de a_n cuando $n \to \infty$, aumentan indefinidamente tomando valores cada vez mayores y además, en la representación en la recta numérica se observa que los términos consecutivos se separan cada vez más. Esto tipos de sucesiones *divergen*.

7.1.4 - Límite de una sucesión numérica.

De acuerdo a lo observado puede decirse que una sucesión *tiende* a un valor determinado (a) si los valores sucesivos de a_n están *más cerca* de a a medida que n crece. Es decir, el error que se comete al aproximar a con a_n es más pequeño (y hasta menor de cualquier valor (ε) si n es lo suficientemente grande.

Dada una sucesión $\{a_n\}$ su límite es a cuando $n \to \infty$; sí y sólo sí para todo número real positivo ε, por pequeño que sea, podemos encontrar un entero $N = N_{(\varepsilon)}$ suficientemente grande; tal que a partir del subíndice N en adelante (esto es, para $n > N$), se tenga siempre: $|a_n - a| < \varepsilon$

Simbólicamente:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \leftrightarrow para\ todo\ \varepsilon > 0;\ \exists\ N_{(\varepsilon)} \in N/\ para\ todo\ n > N_{(\varepsilon)} \to |a_n - a| < \varepsilon$$

Interpretación gráfica:

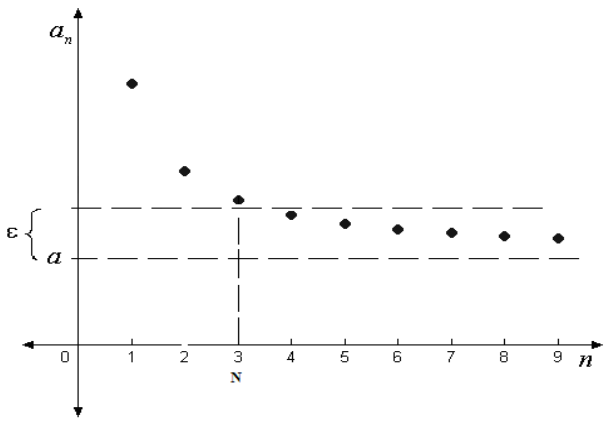


Figura 7.7

Entonces si el límite de la sucesión existe, se deduce que:

- generalmente, $N_{(\varepsilon)}$ debe escogerse cada vez mayor para valores cada vez menores de ε
- los términos a_n van acercándose cada vez más hacia el límite a a medida que n crece
- todo entorno de a , contiene a todos los a_n; excepto tal vez, un número finito de ellos
- la expresión $|a_n - a| < \varepsilon$ de la definición es equivalente a usar el concepto de entorno $a_n \in E_\varepsilon(a)$, es decir, $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.
- como simultáneamente los valores de la sucesión se acercan al límite a, entonces puede demostrarse que se acercan entre sí, es decir, a partir de cierto elemento, suficientemente avanzado, la distancia entre dos elementos cualquiera de la sucesión es tan pequeña como se desee. **Cuando una sucesión tiene esta propiedad se dice que es de Cauchy**.

$$\text{Una sucesión es de Cauchy} \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in R^+ ; \exists \; N_{(\varepsilon)} \in N \;/\; \forall \; n, m > N_{(\varepsilon)} \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Lo interesante de ver es que vale la recíproca de esta propiedad; o sea que *toda sucesión de Cauchy converge a un valor finito.* Por lo que puede analizarse la convergencia de una sucesión sin necesidad de determinar el valor del límite, cuestión que suele resultar de suma utilidad, ya que, muchas veces, interesa determinar sólo el carácter de la sucesión sin importar el valor del límite.

Como se vió en el último ejemplo, si a medida que n crece los números a_n crecen en valor absoluto más allá de toda cota positiva, o sea:

Si fijado cualquier positivo M**,** existe un número entero N, tal que $|a_n|>M$, para $n>N$, la sucesión no tiene límite según la definición dada

Generalizando el significado del concepto límite, se dice que tiene límite infinito o que diverge a infinito, simbólicamente: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Sin que esto implique considerar el símbolo ∞ como un número, ni tampoco a aplicarle las operaciones aritméticas.

De manera análoga, se escribe: $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ si cuando n crece, los números ($-a_n$) crecen más allá de toda cota en la dirección positiva.

Nótese que no basta el crecimiento infinito de a_n (que haya elementos mayores que cualquier M), para que la sucesión tenga límite infinito. Es preciso que todos sean mayores que cualquier M**,** desde un valor N en adelante.

Si para una sucesión no es posible determinar el $\lim_{n\to\infty} a_n$ ya que los elementos de la sucesión oscilan entre dos valores finitos o crecen y decrecen infinitamente, se dice que la sucesión es oscilante.

- *Una sucesión que tiene límite finito se denomina* ***convergente.***
- *Una que tiene límite infinito es* ***divergente****.*
- *Las sucesiones que carecen de límite, finito ó infinito, se llaman* ***oscilantes****.*

Ejemplo: Analizar el carácter de la sucesión $a_n = 2 \cdot (-1)^n$.

$$\lim_{n\to\infty} 2 \cdot (-1)^n = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} (-1)^n = (\pm 2)$$

El límite de la sucesión no existe ya que tiene dos resultados posibles. Por ello la sucesión es OSCILANTE.

Ejemplo: Analizar el carácter de la sucesión $a_n = \frac{2n^2}{n+1}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n+1} \underset{BL'H}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{1} = \infty$$

El límite de la sucesión no es finito. Por ello la sucesión es DIVERGENTE.

7.1.5 – Propiedades del límite de una sucesión.

- **Unicidad del límite**

Una sucesión convergente: $a_1; a_2; a_3; ....a_n; .....$no puede tener más de un límite.

De otro modo, si dos números distintos L_1 y L_2 fueran límites de la misma sucesión, podrían determinarse intervalos abiertos en torno a cada uno de los puntos L_1 y L_2 que no se superpongan. Puesto que cada intervalo contiene todos los a_n, excepto un número finito de ellos, entonces la sucesión converge a L_1 o L_2, pero no converge a los dos a la vez.

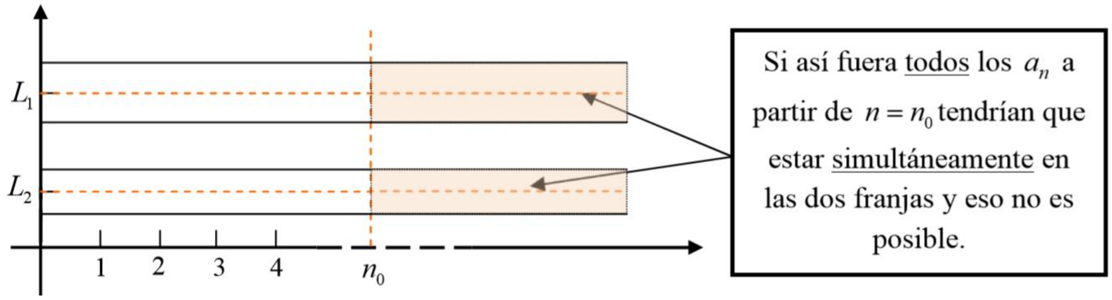


Figura 7.8

En consecuencia, **el límite de una sucesión convergente, está por ello determinado unívocamente.**

- **Conservación del límite**

Si se omite un número finito de términos no se afecta el carácter de una sucesión.

Si de una sucesión convergente se omite cualquier número de elementos, la sucesión que resulta converge al mismo límite que la sucesión original, incluso si se omiten infinitos elementos de determinado modo.

Por ejemplo, si en una sucesión convergente se separa un elemento de cada tres, se resultan dos subsucesiones con un número infinito de elementos que convergen al mismo límite.

Ejemplo: Si se toma la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ que converge a 0 y se divide en dos sucesiones, para n pares y para n impares, se tiene:

$$a_n = \frac{1}{2n} \rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$$

$$a_n = \frac{1}{2n-1} \rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$$

Se analiza que ambas sucesiones de infinitos elementos convergen al mismo límite que la original.

- **Sucesiones acotadas**

Una sucesión $\{a_n\}$ es acotada si existe un intervalo finito que contiene todos los puntos (elementos) de una sucesión. Cualquier intervalo finito está contenido en algún otro intervalo finito que tiene el origen como centro. Por lo tanto, el requisito para que la sucesión sea acotada, es que exista un número M, tal que $a_n \in (-M, M)$ para todo n.

> Una sucesión $\{a_n\}$ es acotada si existe un número real positivo M tal que $|a_n| \leq M$ para todo n. Ese número M se llama cota de la sucesión.

Esta afirmación se desprende de la de límite. Si es posible encontrar un ε que define un intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ que incluye a todos los a_n excepto un número finito de ellos, también es posible determinar un intervalo finito mayor que incluya también a los elementos que quedaron fuera, puesto que n finito corresponde a a_n finito. Es por ello que puede asegurarse que:

> Una sucesión $\{a_n\}$ **convergente** también es necesariamente **acotada**.
> La recíproca no se verifica.

- **Álgebra de límites. Operaciones racionales con límites de sucesiones**

Los límites de sucesiones, como todo límite, cumplen las propiedades enunciadas para límites en tema anterior.

Se considera dos sucesiones: $\{a_n\}$ que converge a a y $\{b_n\}$ que converge a b, por lo que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad y \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

Entonces:

Si la sucesión $\{a_n\}$ converge a a y la sucesión $\{b_n\}$ converge a b, entonces:

- la sucesión $\{c_n\} = a_n + b_n$ converge a c tal que $c = \lim_{n\to\infty} c_n = a + b$
- la sucesión $\{c_n\} = a_n \cdot b_n$ converge a c tal que $c = \lim_{n\to\infty} c_n = a \cdot b$
- siempre que $b \neq 0$, la sucesión $\{c_n\} = \frac{a_n}{b_n}$ converge a c tal que $c = \lim_{n\to\infty} c_n = \frac{a}{b}$

Por medio de estas reglas,pueden ser evaluados fácilmente varios tipos de límites.

Obsérvese que se pueden intercambiar las operaciones racionales de cálculo con el proceso de límite. Se obtiene el mismo resultado, ya sea que se efectúe primero el paso al límite y después una operación racional o viceversa.

En el caso de que alguna de ellas sea divergente, si bien no puede aplicarse el teorema de álgebra de límites que requiere que ambos límites sean números, sí puede enunciarse un resultado ad hoc para este caso que es verdadero y que se deduce a partir de la definición de límite:

Si la sucesión $\{a_n\}$ converge a a y la sucesión $\{b_n\}$ diverge, entonces la sucesión $\{c_n\} = a_n \cdot b_n$ diverge ya que $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$

7.1.6 – Sucesiones Monótonas

Una sucesión no es nada más que un caso particular de función, cuyo dominio es el conjunto de los números naturales. Entonces una sucesión se dice monótona, si lo es como función.

Una sucesión $\{a_n\}$ es **creciente** si y sólo si para todo n se verifica que $a_n \leq a_{n+1}$.

Una sucesión $\{a_n\}$ es **decreciente** si y sólo si para todo n se verifica que $a_n \geq a_{n+1}$.

Una sucesión $\{a_n\}$ es **monótona** si y sólo si es creciente o decreciente para todo n.

Ejemplo: la sucesión $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ es creciente y la sucesión $b_n = \frac{1}{n}$ es decreciente, para todo n. Así ambas son monótonas.

La importancia de las sucesiones monótonas radica en que siempre tienen límite, ya sea éste finito o infinito.

Ejemplo: Dada la sucesión $a_n = \frac{n}{n+1}$ determinar su comportamiento.

Para determinar si es monótona:

$$a_n \quad ¿? \quad a_{n+1}$$

$$\frac{n}{n+1} \quad ¿? \quad \frac{n+1}{(n+1)+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$n\cdot(n+2) \quad ¿? \quad (n+1)\cdot(n+1)$$

$$n^2+2n \quad ¿? \quad n^2+2n+1$$

$$0 \quad < \quad 1 \rightarrow a_n < a_{n+1}$$

La sucesión es **creciente**.

Para determinar su carácter:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \underset{BL'H}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1} = 1$$

La sucesión **converge** a 1.

Por lo tanto la sucesión es **acotada**.

Si los elementos de una sucesión crecientes están acotados superiormente por un elemento ***M*** entonces debe poderse probar, que la sucesión tiende a un cierto límite *a*, que será menor o a lo sumo igual a ***M.***

Figura 7.9

Toda sucesión $\{a_n\}$ **creciente y acotada** es **convergente**.

Análogamente para las sucesiones decrecientes y acotadas.

Se puede afirmar que una sucesión creciente es convergente, o es divergente a $+\infty$ según sea acotada o no. Para la sucesión monótona acotada existe siempre el límite; aunque en la práctica éste puede ser difícil de hallar.

La importancia del concepto de límite de una sucesión, se debe a que a menudo se definen números mediante límites de sucesiones monótonas acotadas. Un ejemplo muy importante es:

El número e.

Se considera la sucesión: $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ cuyos primeros términos son:

$a_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$ $\qquad$ $a_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2{,}25$

$$a_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2{,}37\ \ldots \qquad a_4 = \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{625}{256} = 2{,}44\ \ldots$$

Así sucesivamente.

¿Cómo hacer para saber si converge o no?

Es posible demostrar que la sucesión es creciente y acotada, por lo que se asegura que converge.

Calculando $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ para *n* suficientemente avanzado se puede llegar a aproximar el número e. Así: e ≅ 2,71828182845904.

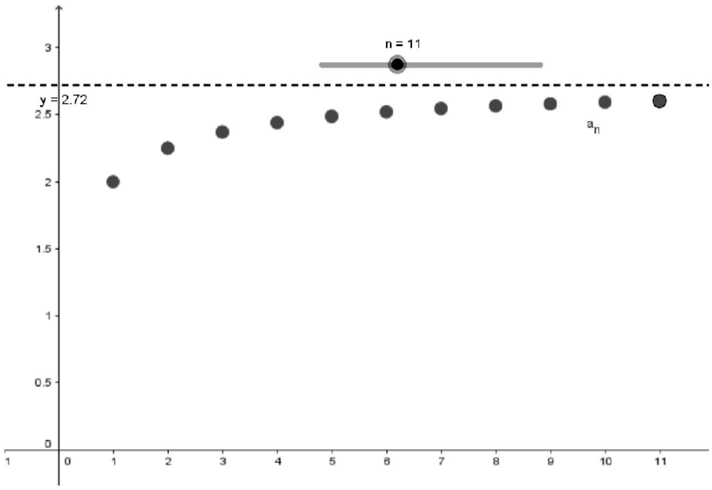


Figura 7.10

El número e, valor límite de la sucesión es un número muy importante de la matemática que aparece en diversas situaciones.

7.2 – Series.

7.2.1 - Introducción

En general se acostumbra a sumar un número finito de términos, dos, tres, cuatro, etc. Si intentamos sumar los términos de una sucesión $\{a_n\}$ obtendremos una expresión de la forma:

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n + \ldots..$

la cual se llama serie infinita, o tan solo serie, y se representa, con el fin de abreviar, mediante el símbolo: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Pero, ¿es posible sumar un conjunto infinito y que el resultado sea finito? Como se verá, ello puede o no resultar así, lo cual definirá el carácter de la serie (si es convergente o si es divergente). Por lo pronto, a fin de facilitar la comprensión de los ejemplos, se dirá (para series numéricas) que si la suma resulta finita (esto es un número real) la serie es convergente. En caso contrario divergente.

A lo largo de este apartado se analizarán series numéricas y series funcionales.

Se pueden dar diferentes definiciones de lo que se entiende por serie, pero teniendo presente el concepto sucesión, resulta oportuno decir que, en matemática, una serie es la suma de los términos de una sucesión.

Ello conduce a plantearse la idea de “suma de infinitos términos”, concepto al cual se le dará precisión a lo largo de este capítulo.

Nota: Algunos autores hacen referencia a serie infinita. En este texto, simplemente se la llama serie, asumiendo que se trata de una suma de “infinitos” términos.

¿Qué significado se le da a la expresión "suma de infinitos términos” y cómo puede llegar a surgir una operación de esta naturaleza? A continuación un ejemplo:

Ejemplo 1: Como una idea intuitiva se puede considerar una cuerda de 2 m de longitud, la cual se divide por la mitad, (2 trozos de 1m), una de esas partes se divide nuevamente por la mitad, (2 trozos de ½ m), nuevamente uno de estos trozos se divide por la mitad, (2 trozos de ¼ m) y se continua indefinidamente con este procedimiento, teniendo al final una cantidad infinita de partes. La suma de las infinitas partes de la cuerda debe ser 2m, por lo que:

$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

O sea, se define una serie cuyo término general puede escribirse: $\frac{1}{2^n}$. La suma infinita, o serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)$ converge a 2.

7.2.2 – Utilidad de las series

Las series tienen una amplia gama de aplicaciones en diferentes ramas de la ciencia. Los ejemplos anteriores muestran algunas posibilidades de utilización. Pero debe resaltarse que constituyen un pilar importante como herramienta de cálculo. Son de gran utilidad para reemplazar funciones trascendentes por algebraicas, en general por un polinomio, lo cual facilita los cálculos. Justamente las series son un algoritmo de aproximación que utilizan las computadoras cuando con ellas se grafican funciones trascendentes o se realizan cómputos que involucran dichas funciones. En algunos diseños de electrónica la condición para determinar si el sistema resultará estable, la da el hecho que determinada serie resulte o no convergente. Tienen innumerables aplicaciones en biología, especialmente la llamada serie de Fibonacci para determinar el crecimiento celular, número de bacterias, población etc. Dicha serie proviene de la sucesión homónima. La misma inicia con 0 y 1y a partir de allí cada término es la suma de los dos anteriores, es decir $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$; para $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$

Se pueden mencionar otros muchos ejemplos de problemas, cuyo planteo matemático requiere la construcción de una serie. Entre otros, el proceso de determinación de velocidad, dirección, distancia, altitud, de objetos estáticos o en movimiento (formaciones meteorológicas, automóviles, aviones etc) mediante la utilización del RADAR (por su sigla en inglés de **Ra**dio **D**etection **A**nd **R**anging) que se basa en la emisión de una señal de radio (onda electromagnética) que se refleja o rebota, por ejemplo en una aeronave y retorna al foco emisor, la computadora determina los parámetros señalados, recurriendo a algoritmos que se sustentan en el concepto de serie. Otro caso típico es el de detección de banco de peces, submarinos, etc. mediante el uso de Sonar con el que se emite una señal sonara que rebota en el objeto bajo estudio. El eco es recibido por el emisor que mediante procedimientos que incluyen la resolución de series, con una construcción similar al caso de los trenes y la mosca o de cualquiera de los ejemplos vistos, determina tamaño, posición, velocidad, dirección, profundidad, etc.

7.2.3 – Series numéricas

Definición:

La expresión: $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$

Se denomina serie numérica infinita o simplemente serie. ***Una serie es una suma de infinitos términos*** $u_1, u_2, \cdots, u_n$ ***,..., donde*** u_n ***es el término general de la serie.*** *Simbólicamente se suele denotar:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ , \textbf{\textit{es decir}} } \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

Por las razones expuestas en la introducción, es de especial interés estudiar el carácter de la serie y, de ser necesario, conocer el valor de su suma.

7.2.4 – Convergencia y divergencia de las series

Sea $\{u_n\}$ la sucesión $u_1;\ u_2;\ u_3;\ \ldots;\ u_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ la serie correspondiente.

Para calcular la suma de esta serie, se recurre a la sucesión $\{S_n\} = S_1;\ S_2; S_3;\ \ldots; S_n;$ .... de sumas parciales de la sucesión $\{u_n\} = \{\ u_1;\ u_2;\ u_3;\ \ldots;\ u_n\}$

Los términos de la sucesión $\{S_n\}$ se calculan como sigue:

$$\begin{aligned} &S_1 = u_1 \\ &S_2 = u_1 + u_2 \\ &S_3 = u_1 + u_2 + u_3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Si se continúan construyendo indefinidamente estas sumas, se obtiene la mencionada sucesión de sumas parciales: $\{S_n\} = S_1; S_2 \ldots S_n; \ldots$ Conforme a lo visto, el límite para $n \to \infty$ del enésimo término de la sucesión de sumas parciales, en caso de existir, será la suma S de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

Esto es: $\boxed{S = \lim_{n\to\infty} S_n} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ o simplemente $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$

Definición:

Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$, y su sucesión de sumas parciales asociadas $\{S_n\} = S_1; S_2; \ldots; S_n; \ldots;$. tal que su límite $S = \lim_{n\to\infty} S_n$. **Si dicho límite existe y es Finito (la sucesión de sumas parciales {S_n} es convergente), la serie se dice convergente**. **En caso contrario se dirá que la serie es divergente** y no tiene suma (límite infinito o no existe).

Nota: En lo sucesivo se evitará referirse a serie infinita, puesto que si se habla de serie se trata del concepto de suma de "infinitos" términos. De igual modo, cuando se diga que el resultado de la suma es un número real se sobreentiende que es finito, ya que en caso contrario no sería un número. No obstante se utilizará la expresión número finito, toda vez que se considere que ello beneficia la comprensión del tema.

Retomando el ejemplo de la cuerda,la sucesión de sumas parciales que corresponde a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ que resulta del estudio de dicho problema, es:

$$S_1 = 1 \quad \Rightarrow S_1 = 1$$
$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow S_2 = \frac{3}{2}$$
$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \quad \Rightarrow S_3 = \frac{7}{4}$$
$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \quad \Rightarrow S_4 = \frac{15}{8}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

El límite es $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{1}^{n} \frac{1}{2^{n-1}} = 2$. Resultado ya previsto con el planteo del problema.

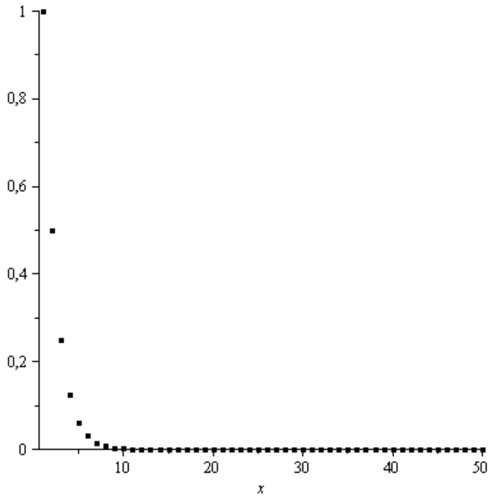
Los primeros diez términos de la sucesión $\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$ son:

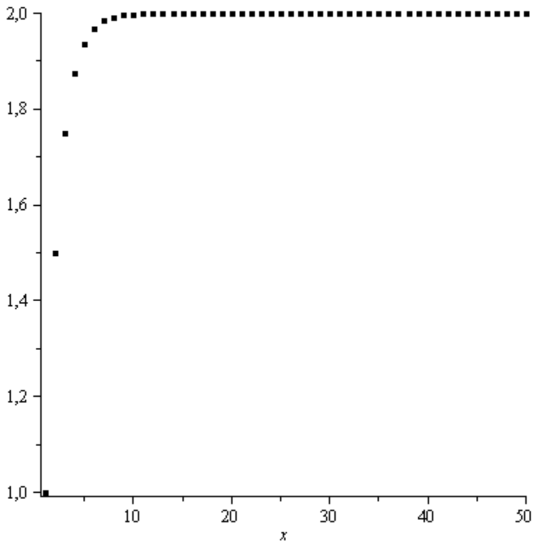
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \frac{1}{512}$$

Los diez primeros términos de la sucesión de sumas parciales de la serie generada son:

$$1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \frac{63}{32}, \frac{127}{64}, \frac{255}{128}, \frac{511}{256}, \frac{1023}{512}$$

Graficando ambas sucesiones se visualiza la convergencia de la sucesión y de la serie asociada





sucesión $\left(\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$ $\qquad\qquad$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$

Generalmente no es necesario conocer el valor de la suma de una serie, pero si determinar su carácter, es decir, si es convergente o divergente. Se expondrán algunos criterios acerca de ello.

7.2.5 – Condición necesaria para la convergencia de una serie

Teorema de la Condición Necesaria para la convergencia de una serie:

"Si una serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge, entonces su enésimo término tiende a cero, cuando *n* tiende a infinito, ello es $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$."

Esta condición es necesaria pero no suficiente, o sea:

- si el enésimo término tiende a cero, cuando n tiende a infinito, ello no implica que la serie sea convergente (puede o no serlo).
- **si el enésimo término no tiende a cero cuando n tiende a infinito, entonces la serie es divergente.**

Demostración:

Sea la serie convergente: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$.

Entonces se cumple que: $\lim_{n\to\infty} S_n = S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$

Donde S es la suma de la serie que es un número real.

También se verifica: $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$

Restando: $\lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0 \quad \rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = 0$

Planteando que: $S_n = S_{n-1} + u_n$

Por lo que: $\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = 0}$ c.q.d.

Ejemplo 1: Si se aplica la condición enunciada a la serie $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \cdots + \frac{n}{n^2+1} + \cdots$, es decir, se calcula el límite del término n-ésimo, resulta $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$, esto es, el n-ésimo término tiende a cero, por lo que *no puede asegurarse* si la serie converge o diverge y debe continuar el análisis.

Ejemplo 2: Analizar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+130}{n^2+15}$

El límite del término general es $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+130}{n^2+15} = 1 \neq 0$. Tiende a 1, se puede afirmar, sin más análisis, que la serie es *divergente*.

7.2.6 – Serie armónica

La serie armónica es un ejemplo de que la condición es necesaria pero no es suficiente.

Dicha serie es: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (llamada serie armónica porque cada término es la media armónica de los dos contiguos $x_i = \frac{x_{i-1} - x_{i+1}}{x_{i-1} + x_{i+1}}$).

Esta serie es divergente a pesar de que su enésimo término tiende a cero. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Demostración:

Se agrupan los términos de la serie como sigue:

$$1+\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right]+\left[\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right]+\left[\frac{1}{17}+\cdots\right.$$

Si se toma la serie auxiliar:

$$1+\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right]+\left[\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right]+\cdots$$

Se observa que cada término de la serie auxiliar es menor que el correspondiente término (agrupado) de la serie armónica.

Sea S_n la suma de n términos de la serie armónica y S'_n la suma de n términos de la serie auxiliar.

Comparando ambas sumas, término a término, para $n > 2$ se tiene $S_n > S'_n$

Se analiza la suma S'_n

$$\left.\begin{array}{l}
S''_0 = S'_1 = 1 \\
S''_1 = S'_2 = 1+\frac{1}{2} \\
S''_2 = S'_4 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1+2\,\frac{1}{2} \\
S''_3 = S'_8 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1+3\,\frac{1}{2} \\
S''_4 = S'_{16} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1+4\,\frac{1}{2} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
S''_k = 1+k\,\frac{1}{2}
\end{array}\right\}$$

La sucesion de sumas parciales puede escribirse entonces $S'_1; S'_2; S'_4; S'_8; S'_{16}; \cdots$ y cambiando los subindices $S''_0; S''_1; S''_2; S''_3; \cdots; S''_k; \cdots$ donde $S''_k = 1+k\,\frac{1}{2}$

Se observa que $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n = \lim\limits_{k\to\infty} S''_k = \lim\limits_{k\to\infty}(1+k\,\frac{1}{2}) = \infty$

De aquí resulta que no existe límite finito para la suma de la serie auxiliar y por ser esta menor que la suma de la serie armónica, tampoco ella tendrá límite finito, lo cual quiere decir que **la serie armónica es divergente.**

7.2.7 – Serie geométrica

Se denomina *Serie Geométrica* a la serie de la forma

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a\,q^{n-1}} = a + a.q + a.q^2 + \cdots + a.q^{n-1} + \cdots$$

que es una **progresión geométrica** de primer término a y razón q distinta de cero. Cada término se obtiene multiplicando al anterior por el número q, llamado razón.

También puede responder a la forma: $\sum_{n=0}^{\infty} a\,q^n = a + a.q + a.q^2 + \cdots + a.q^{n-1} + \cdots$

La convergencia de este tipo de series depende del valor de la razón q, según el siguiente análisis:

Tomando la serie de expresión:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\,q^{n-1}$$

La suma de sus primeros n términos es:

$$S_n = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \cdots + a \cdot q^{n-1}$$

Multiplicando ambos miembros por *q*:

$$S_n \cdot q = a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + a \cdot q^4 + \cdots + a \cdot q^n$$

Restando las expresiones anteriores:

$$S_n - S_n \cdot q = a - a \cdot q^n$$

De donde, trabajando la expresión:

$$S_n \cdot (1 - q) = a \cdot (1 - q^n)$$

Despejando:

$$\boxed{S_n = a\,\frac{1-q^n}{1-q}}$$

Evidentemente el límite de S_n dependerá del valor de q, para determinado valor de a.

1) Si $|q| < 1$ *el* $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ entonces $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a\,\frac{1-q^n}{1-q} = a\,\frac{1}{1-q}$

Es decir que la serie geométrica **converge** y su suma vale: $S = \frac{a}{1-q}$

2) Si $|q| > 1$ $\lim_{n\to\infty} q^n = \pm\infty$ y con ello $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a\,\frac{1-q^n}{1-q} = \infty$

Es decir que la serie geométrica **diverge.**

3) Si $q = 1$, la serie toma la forma de $a + a + a + \cdots + a + \cdots$ y $S_n = n \cdot a$

Entonces $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n \cdot a = \infty$, es decir la serie geométrica **diverge**.

4) Si $q = -1$, la serie toma la forma de $a - a + a - \ldots + a - a + \ldots$ y en este caso:

$S_n = \begin{cases} 0 & si\ n\ es\ par \\ a & si\ n\ es\ impar \end{cases}$ Por lo tanto no existe el límite de S_n y la serie **diverge**.

La serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} a\, q^{n-1} = a + a.q + a.q^2 + \cdots + a.q^{n-1} + \cdots$ **es convergente si y sólo si el valor absoluto de la razón es menor que 1, esto es si** $|q|<1$**.**

Ejemplo 1: Analizar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$

Serie geométrica de $a = \frac{1}{2}$ y $q = \frac{1}{2}$. Al ser $|q|<1$ **la serie converge** y su suma es:

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

Ejemplo 2: Analizar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n$

Es una serie geométrica de $a = 1$ y $q = \frac{4}{3}$, al ser $|q|>1$ la **serie diverge**.

Ejemplo 3: Expresar el número periódico 0,66666…como una serie geométrica y escribir su suma en forma de cociente de dos números enteros.

Una serie geométrica se puede utilizar para expresar un número decimal periódico como cociente de dos enteros. Se plantea una serie donde cada sumando aporta una ubicación decimal más:

$$0{,}6666\ \ldots. = \frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \cdots \ldots + \frac{6}{10^n} + \cdots$$

Resultando una serie geométrica de $a = \frac{6}{10}$; $q = \frac{1}{10} \rightarrow |q| < 1$,es decir la serie:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^n$ es convergente, por lo tanto tiene suma finita: $S = \frac{a}{1-q} = \frac{\frac{6}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{6}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Ejemplo 4: Se deja caer una pelota desde una altura de 12 m y cada vez que toca el suelo rebota hasta una altura considerada igual a tres cuartos de la distancia de la que cae. Determinar la distancia total recorrida por la pelota antes de alcanzar el estado de reposo.

Considerando h_n la suma de las distancias recorridas hasta la caída n, la primera distancia recorrida es la altura de caída inicial: $h_1 = 12$

$$h_2 = \underbrace{12 \cdot \frac{3}{4}}_{hacia\ arriba} + \underbrace{12 \cdot \frac{3}{4}}_{baja} = 24\ \frac{3}{4}$$

$$h_3 = \left(12\,\frac{3}{4}\right)\frac{3}{4} + \left(12\,\frac{3}{4}\right)\frac{3}{4} = 24\left(\frac{3}{4}\right)^2$$

Y así sucesivamente. La distancia total es $\underbrace{D = 12 + \sum_{n=1}^{\infty}}_{Serie\ geométrica} 24\left(\frac{3}{4}\right)^n$

Serie geométrica de $a = 24$; $q = \frac{3}{4}$, por lo tanto es convergente y tiene suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 24\left(\frac{3}{4}\right)^n = 72$$

En resumen: $D = 12 + 72 = 84$. La pelota recorre en total 84 m.

7.2.8 – Teoremas sobre series

Teorema: ***La convergencia de una serie no se altera si en ella se suprime un número finito de términos.***

Demostración: Sea la serie $a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \cdots + a_n + \cdots$, llamando S_k a la suma de los k primeros términos y S_{n-k} a la suma de los restantes términos hasta el enésimo.

Entonces se tiene: $S_n = S_k + S_{n-k}$

Donde la única suma que depende de n es S_{n-k} ya que S_k es constante para todo valor de n. En estas condiciones, si existe el límite de S_{n-k}, existirá también el límite de S_n y con ello la convergencia de la serie dada. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S_k + \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-k}$

Teorema***: Si la serie*** $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ ***(1) converge y su suma es igual a S, entonces la serie*** $C.a_1 + C.a_2 + \cdots + C.a_n + \cdots$ ***(2) también converge y su suma es igual a*** $C.S$, ***donde*** C ***es una constante.***

Teorema***: Sean las series convergentes***

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ **cuya suma es** S **(3)**

y $b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots$ **cuya suma es** S' **(4)**

Entonces las series: $(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) + \cdots$ **(5)**

$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \cdots + (a_n - b_n) + \cdots$ **(6)**

Son ambas convergentes y sus sumas valen $S + S'$ y $S - S'$ **respectivamente.**

Estos dos últimos teoremas devienen de la propiedad de linealidad que las series heredan de la noción de límite.

7.2.9 – Series de términos positivos

Una serie $\sum u_n$ tal que $u_n \geq 0$ para todo $n \in N$, se dice que es una serie de términos positivos.

Observar que una serie de términos positivos deviene en una sucesión creciente por lo que, o bien es convergente (cuando esa sucesión está acotada) o es positivamente divergente.

Como el límite del término n-ésimo igual a cero, $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$, no nos permite sacar conclusiones acerca de la posible convergencia de la serie, es necesario aplicar un criterio para concluir.

Se desarrollan en las secciones siguientes criterios de convergencia aplicados a series de términos positivos.

Criterios de convergencia:

- **Criterio de la integral de convergencia**

Sea la serie de términos positivos y no crecientes $U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n + \cdots$ **(1)**

Esto es, donde $U_1 \geq U_2 \geq U_3 \geq \cdots$; y sea $f(x)$ una función continua no creciente, tal que se cumple $f(1) = U_1$; $f(2) = U_2$; ... ; $f(n) = U_n$ **(2)**

Entonces:

1) Si la integral impropia $\int_1^\infty f(x)\, dx$ **converge, también converge la serie (1).**

2) Si la integral impropia $\int_1^\infty f(x)\, dx$ **diverge, también diverge la serie (1).**

Demostración: Ver Anexo Tema 7

Aplicación del criterio de la integral de convergencia. Serie p.

Analizar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^P} + \frac{1}{2^P} + \frac{1}{3^P} + \cdots + \frac{1}{n^P} + \cdots$

llamada **serie p**, **o serie armónica generalizada o serie de Riemman** (para $p = 1$ es la serie armónica ya estudiada)

Haciendo $f = \left\{ (x, y) \big/ y = \frac{1}{x^P} \right\}$. Esta función satisface las condiciones del criterio.

Recordar que: $\int_1^n \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} x^{1-p} \Big]_1^n$ si $p \neq 1$; $\int_1^n \frac{dx}{x^p} = \ln x \Big]_1^n$ si $p = 1$

1) Si $p > 1$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-p} dx = \lim_{b\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Bigg]_1^b = \frac{1}{1-p} \lim_{b\to\infty} x^{1-p} \Big]_1^b = \frac{0-1}{1-p} = \frac{1}{p-1} = cte.$$ La integral converge

2) Si $p < 1$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-p} dx = \lim_{b\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Bigg]_1^b = \frac{1}{1-p} \lim_{b\to\infty} x^{1-p} \Big]_1^b = \infty.$$ La integral diverge.

3) Si $p = 1$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} x^{-p}\,dx = \lim_{b\to\infty} \ln x \Big]_1^{b} = \lim_{b\to\infty} \left(\ln b - \ln 1\right) = \infty.\ \text{La integral diverge.}$$

<u>El análisis realizado constituye una importante herramienta para determinar, en diversos casos, si una serie del tipo p converge o no.</u>

- **Criterio de D'Alembert (o del cociente)**

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ una serie de términos positivos, en la que todo $U_n \neq 0$,

$U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n + \cdots$ **la relación entre los términos (n+1)-enésimo (U_{n+1}) y n-enésimo (U_n) cuando $n \to \infty$ tiene límite finito positivo L, o sea:** $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = L}$

Entonces:

- **Si $0 \leq L < 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ converge**
- **Si $L > 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ diverge**
- **Si $L = 1$ no se obtiene conclusión con este criterio.**

Demostración: Ver Anexo Tema 7

El siguiente ejemplo ilustra acerca de que si $L = 1$, no se puede determinar el carácter de la serie.

Ejemplo 1: Analizar, aplicando el criterio de D'Alembert, la serie p $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

Se verá que este criterio no resuelve el problema. En efecto:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} \right| \lim_{n\to\infty} \left| \left[\frac{n}{n+1} \right]^p \right| = 1,\ \text{para todo valor de } p.$$

Con lo que queda demostrado que para este caso este criterio no es útil para determinar el carácter de la serie.

Nota: **El criterio del cociente es muy adecuado para las series que convergen rápidamente, que no es el caso de las series que contienen exponenciales**.

Ejemplo 2: Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots \quad \text{Aplicando el criterio de D'Alembert}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$$ y la serie **converge**.

Ejemplo 3: Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}$

$$2+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\cdots+\frac{2^n}{n}+\cdots \quad \text{Aplicando el criterio de D'Alembert}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2>1$$ y la serie **diverge**.

Ejemplo 4: Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{n}{n+1}+\cdots \quad \text{Aplicando el criterio de D'Alembert}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2+2n}=1$$

El criterio de D'Alembert no da respuesta, no obstante aplicando la condición necesaria:

$$\lim_{n\to\infty}U_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

es decir que la serie es divergente pues su enésimo término no tiende a cero.

- **Criterio de Cauchy (ó de la raíz)**

  Es un criterio de mucha utilidad para términos compuestos por una potencia enésima.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ **una serie de términos positivos** $U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n + \cdots$

La magnitud $\sqrt[n]{U_n}$ **tiene límite finito** L **cuando** $n \to \infty$**, es decir** $\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = L}$

Entonces:

- **Si** $L < 1$ **la serie** $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ **converge**
- **Si** $L > 1$ **la serie** $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ **diverge**
- **Si** $L = 1$ **no se obtiene conclusión con este criterio.**

Demostración: Ver Anexo Tema 7

Ejemplo 1: Estudiar la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n = \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + \cdots$

Aplicando el criterio de Cauchy:

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right) = \frac{1}{2} < 1,$ por lo tanto la serie *converge*.

Si se decidiese aplicar el criterio de D'Alembert a la misma serie:

$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}$, calcular este límite implica un laborioso proceso, lo que hace desaconsejable la aplicación de ese criterio.

Ejemplo 2: Analizar la serie armónica con el criterio de Cauchy: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$$

para calcular el límite se hace $y = \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$; $ln\, y = \frac{1}{n} \cdot ln \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot (ln 1 - ln\, n) = -\frac{ln\, n}{n}$

Aplicando Bernolulli L'Hospital (indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$)

$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{\ln n}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n}}{1} = 0$ de donde: $\lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$

Se ve que el criterio no aporta información útil acerca de la convergencia de la serie.

- **Criterio de Raabe**

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ **una serie de términos positivos** $U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n + \cdots$

Si existe $\boxed{\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{U_n}{U_{n-1}}\right) = L}$

Entonces:

- **Si $L > 1$ la serie** $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ **converge**
- **Si $L < 1$ la serie** $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ **diverge**
- **Si $L = 1$ no se obtiene conclusión con este criterio. Sin embargo, si el límite tiende a 1, conservándose siempre inferior, la serie es divergente.**

Demostración: Ver Anexo Tema 7

Ejemplo 1: Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \cdots + \frac{(2n-1)}{(2n)} + \cdots$ determinar su carácter:

Aplicando D'Alembert:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{U_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2(n+1)-1}{2(n+1)}}{\frac{2n-1}{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2-1)2n}{2(n+1)(2n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+4n-2n}{(2n+2)(2n-1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+2n}{4n^2+4n-2n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+2n}{4n^2+2n-2} = 1$$

Este criterio no resuelve el problema.

Analizándola por Raabe:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{U_n}{U_{n-1}}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{4n^2+2n}{4n^2+2n-2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-2n}{4n^2+2n-2} = 0 < 1 \;\Rightarrow\; \textbf{Divergente}$$

Ejemplo 2: Dada la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ determinar su carácter:

Aplicando el criterio de Raabe

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{U_n}{U_{n-1}}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2n-1}}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{2n-1}{2n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n+1} = 1$$

Pero la serie es divergente pues la expresión de Raabe se mantiene menor que 1.

7.2.10 – Series alternadas

Anteriormente se analizaron series de términos positivos. Se verán a continuación series cuyos términos son alternativamente positivos y negativos.

Una serie $\sum u_n$ tal que $u_n > 0$ para todo $n \in N$, se dice que es una serie alternada o de términos alternados, si:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots$$

o

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\,u_n = -u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \ldots$$

Un criterio de convergencia para este tipo de series lo brinda el siguiente teorema:

- **Teorema de Leibniz**

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ una serie alternada, tal que verifica:

- **Sus términos decrecen en valor absoluto, es decir, para todo $n \geq 1$ se cumple que $|U_n| > |U_{n+1}|$**
- $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$

Entonces la serie es <u>convergente</u>, su suma es positiva y no supera el primer término.

Demostración: Ver Anexo Tema 7

Ejemplo 1: La serie $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\cdots$ cumple con:

$$|u_n| \quad ? \quad |u_{n+1}|$$

$$\left|(-1^{n+1})\frac{1}{n}\right| \quad ? \quad \left|(-1^{n+2})\frac{1}{n+1}\right|$$

$$\frac{1}{n} \quad ? \quad \frac{1}{n+1}$$

$$n+1 \quad > \quad n$$

a) $|u_n| \quad > \quad |u_{n+1}|$ para todo n

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(1)^{n+1}\,\frac{1}{n} = 0$

y por el teorema de Leibniz se puede afirmar que es **convergente**.

La suma de los n primeros términos $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ difiere de la suma S en una magnitud menor que el primer término suprimido, en este caso $\frac{1}{n+1}$, porque la suma del resto de la serie es menor que el primer término de la misma.

7.2.11 – Series de términos positivos y negativos

Las series alternadas son un caso particular de las series de términos positivos y negativos. En este caso **se supondrá que los números U_1, U_2, U_3, ... podrán ser negativos y/o positivos**. Un criterio de convergencia resulta el siguiente teorema:

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ una serie de términos positivos y negativos, tal que la serie de valores absolutos asociada $|U_1| + |U_2| + |U_3| + \ldots + |U_n| + \ldots$ converge, entonces la serie de términos positivos y negativos también converge.

Ejemplo 1: Estudiar la convergencia de la serie $\frac{sen\,\alpha}{1^2} + \frac{sen\,2\alpha}{2^2} + \cdots + \frac{sen\,n\alpha}{n^2} + \cdots$ **(1)**

Donde α es un número cualquiera.

Considerando las series $\left|\frac{sen\,\alpha}{1^2}\right| + \left|\frac{sen\,2\alpha}{2^2}\right| + \cdots + \left|\frac{sen\,n\alpha}{n^2}\right| + \cdots$ **(2)**

$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$ **(3)**

Se advierte que: serie **(2)** < serie **(3)**; y como **(3)** es convergente por ser serie p con $p = 2 > 1$, por lo que **(2)** también lo es y, en virtud del teorema anterior, **(1)** es **convergente**.

Ejemplo 2: Estudiar el carácter de la serie: $\frac{cos\frac{\pi}{4}}{3} + \frac{cos\frac{3\pi}{4}}{3^2} + \frac{cos\frac{5\pi}{4}}{3^3} + \cdots + \frac{cos\frac{(2n-1)\pi}{4}}{3^n} + \cdots$ **(4)**

Considerando la serie: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \cdots$ **(5)**

La **(5)** es una progresión geométrica de razón $\frac{1}{3}$, por lo tanto converge. Al mismo tiempo es mayor que la formada por los valores absolutos de **(4)**. Lo que lleva a la conclusión de que **(4)** es una serie **convergente**.

El criterio de convergencia desarrollado para series de términos positivos y negativos es suficiente pero no necesario. Es decir que hay series de valores absolutos que divergen mientras que la serie de términos positivos y negativos converge. Por ello resulta necesario introducir los conceptos de *convergencia absoluta* y *convergencia condicional*.

Convergencia Absoluta y Convergencia Condicional:

- La serie de términos positivos y negativos: $U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n + \cdots$ se dice ***absolutamente convergente*** si converge la serie $|U_1| + |U_2| + |U_3| + \cdots + |U_n| + \cdots$
- La serie de términos positivos y negativos: $U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n + \cdots$ se dice ***condicionalmente convergente*** si diverge la serie $|U_1| + |U_2| + |U_3| + \cdots + |U_n| + \cdots$

Ejemplo 3: La serie $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ es condicionalmente convergente, pues la serie formada con los valores absolutos de sus términos es la serie armónica que es divergente. Pero la serie dada es convergente, según se puede probar con el criterio de Leibniz.

Ejemplo 4: La serie alternada $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots$ es absolutamente convergente pues la serie formada con los valores absolutos $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$ es convergente, según se puede probar con el criterio de D'Alembert.

7.2.12 – Series de funciones

Las series estudiadas hasta ahora son numéricas de términos constantes. Se analizarán a continuación series cuyos términos son funciones de *x*, en particular series de potencias, las cuales se pueden considerar como una forma general de expresar una función polinómica.

Definición de serie de funciones:

La serie del tipo: $U_1(x)+U_2(x)+U_3(x)+\cdots+U_n(x)+\cdots$ se denomina serie de funciones, donde $x \in R$; tal que para cada valor de *x* se tiene una serie numérica distinta.

Dando a *x* valores numéricos en una serie de funciones, se obtienen diferentes series numéricas que pueden ser convergentes o divergentes. El desafío es determinar para qué valores de *x* la serie de funciones converge, es decir, genera una serie numérica convergente.

El conjunto de valores de x para los cuales la serie es convergente se denomina **dominio de convergencia de la serie**.

Ejemplo 1: Sea la serie geométrica con $a = 0$ y $q = x$, la cual es

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

Es una progresión geométrica que converge cuando $|x| < 1$. Por lo tanto, la serie converge a la suma $S = \frac{1}{1-x}$ si $|x| < 1$.

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ define la función $f(x) = \frac{1}{1-x}$

El dominio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ está dado por $(-1,\ 1)$ y la suma (para *x* perteneciente al dominio) se especifica con $S(x) = \frac{1}{1-x}$

o bien $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \forall x \in (-1;\ 0)\ \text{U}\ (0;\ 1)$.

Esta igualdad tiene sentido en la intersección de los dos intervalos señalados. Es decir que es posible desarrollar la función $\frac{1}{1-x}$ sólo en (-1; 0) U (0; 1).

La suma de una serie de funciones es también una función de *x*, cuando la *x* pertenece al dominio de convergencia, esto es: $S = \{(x;s)/S = S(x)\}$

Sea $S_n(x)$ la suma de los *n* primeros términos de una serie de funciones. Si esta serie converge:

$$S(x) = S_n(x) + \gamma_n(x)$$

Donde $\gamma_n(x)$,que se denomina ***resto de la serie***, verifica: $\gamma_n(x) = U_{n+1}(x) + U_{n+2}(x) + \cdots$

$\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\left[S(x) - S_n(x)\right] = 0$ y por lo tanto:

El resto de una serie convergente tiende a cero para $n\to\infty$

7.2.13 – Series de potencia. Intervalo de convergencia

Definición:

Se llama serie entera o serie de potencia a una serie de funciones de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

donde $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots$ *son números constantes llamados coeficientes de la serie.*

Fijado un valor real para *x*, la serie de potencias se convierte en una serie numérica. El dominio de convergencia de una serie de potencia es el conjunto de todos los *x* para los que la serie de potencias converge, siempre es cierto intervalo que puede, en particular, reducirse a un punto. Determinar este intervalo es el objetivo principal de este estudio.

7.2.13.1 –Teorema de Abel

a) Si una serie de potencias converge para un cierto valor x_0 no nulo, entonces converge absolutamente para todo valor *x* tal que: $|x| < |x_0|$

b) Si la serie diverge para un cierto valor x_0', entonces diverge para todo *x* tal que: $|x| > |x_0'|$

Demostración: Ver Anexo Tema 7

El teorema de Abel permite determinar puntos de convergencia o divergencia de una serie de potencias conociendo el comportamiento para un cierto punto. Si x_0 es un punto de convergencia, entonces la serie converge absolutamente en todo $x \in \left(-x_0\ ,\ x_0\right)$. En cambio, si x_0' es un punto de divergencia, las serie diverge para los *x* a la izquierda de $\left(-x_0'\right)$ y también para *x* a la derecha de x_0'.

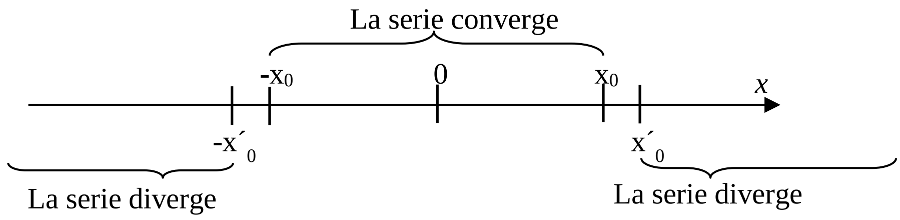


Figura 7.13

Se concluye que es posible determinar un número *R*, tal que para $|x| < R$ **se tienen puntos de convergencia absoluta y para** $|x| > R$ **estarán los puntos de divergencia.** Determinando de esta manera un intervalo de convergencia que, por el Teorema de Abel, está centrado en el origen.

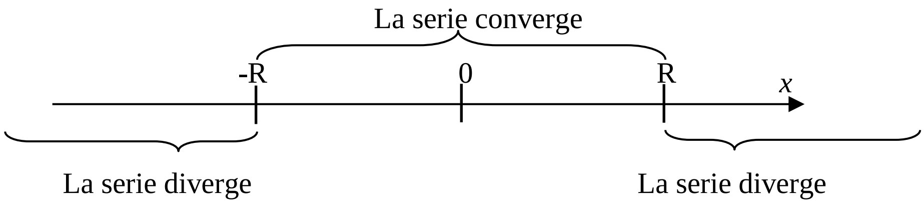


Figura 7.14

El intervalo centrado en el origen y con extremos en -*R* y *R* se llama ***intervalo o campo de convergencia*** y *R* se llama ***radio de convergencia*** de la serie de potencias.

> “El dominio de convergencia de una serie de potencias, es un intervalo con centro en el origen de coordenadas”.

En los extremos del intervalo el estudio de la convergencia debe efectuarse individualmente (ello es para $x = R$ y para $x = -R$) y determinar así si el intervalo es abierto o cerrado en los extremos, ya que puede ser convergente para el valor de un extremo y no en el otro, o ser convergente para ambos valores o para ninguno de ellos.

En función de lo dicho, al analizar la convergencia de una serie de potencias pueden darse ciertos casos. A saber:

Una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, cumple sólo una de las siguientes condiciones:

a) La serie converge sólo cuando $x = 0$.

b) La serie es absolutamente convergente para todos los valores de x.

c) Existe un número $R > 0$ tal que la serie es absolutamente convergente para todos los valores de x tales que $|x| < R$ y es divergente para todos los valores de x tales que $|x| > R$.

7.2.13.2 – Determinación del radio de convergencia

Sea la serie: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$

considerando la serie formada por los valores absolutos de sus términos:

$$|a_0| + |a_1||x| + |a_2||x|^2 + \cdots + |a_n||x|^n + \cdots$$

Para estudiar la convergencia de estas serie de términos positivos se aplica el criterio de D'Alembert:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}\, x^{n+1}}{a_n\, x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| = L\,|x|$$

Entonces:

Si $L \cdot |x| < 1$ la serie de valores absolutos es convergente; esto es, si $|x| < \frac{1}{L}$; por lo tanto la serie de potencias converge absolutamente.

Pero si $|x| > \frac{1}{L}$ la serie diverge, tanto una como la otra.

Por ello, el intervalo de convergencia de la serie de potencias dada tiene como extremos a $\left(-\frac{1}{L}\right)$ y $\left(\frac{1}{L}\right)$, es decir

$$\boxed{R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{L}}.$$

De manera semejante se puede aplicar el criterio de Cauchy para la determinación del intervalo de convergencia, en función de la forma de la serie. De ahí:

$$\boxed{R = \frac{1}{\lim_{n\leftarrow\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}}$$

Una primera aproximación al intervalo de convergencia y sin riesgo de cometer mayores errores, es considerarlo como intervalo abierto, ya que a lo sumo se dejarán afuera de consideración dos valores del intervalo. Entonces, si no se analizan los extremos, se dice que el intervalo de convergencia es:

$$I_c = \left(-\frac{1}{L}, \frac{1}{L}\right)$$

Ejemplo 1: Determinar el intervalo de convergencia de la serie $1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$

Aplicando el criterio de D'Alembert $\lim_{n \to \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = |x|$

Por lo tanto la serie converge si $|x| < 1$, esto significa que el intervalo de convergencia es $(-1\,,\,1)$.

En los extremos del intervalo, por el criterio mencionado no se puede saber si es o no convergente. Sin embargo se puede ver que la serie es divergente tanto para $x = 1$ ya que su suma será infinita y para $x = -1$ ya que en este caso la suma no tendrá límite.

Ejemplo 2: Determinar el intervalo de convergencia de la serie $\frac{2x}{1} - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} - \cdots$

Aplicando el criterio de D'Alembert:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{(2x)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(2x)^n}{n}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| |2x| = |2x| < 1$$

Por lo tanto la serie converge en $\left(-\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\right)$. Se analiza que sucede en los extremos.

- Si $x = -\frac{1}{2}$ se tiene $\sum \frac{\left(2 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)\right)^n}{n} = \sum (-1)^n \cdot \frac{\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right)^n}{n} = \sum (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ que es una serie numérica alternada por lo que debe analizarse con el teorema de Leibniz
    - $\lim_{n \to \infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 0$, es decir el término general tiende a cero cuando n tiende a infinito
    - $\left|\frac{1}{n}\right| > \left|\frac{1}{n+1}\right|$, es decir que cada término de la serie en valor absoluto es menor al anterior

    Por lo que la serie es convergente.
- Si $x = \frac{1}{2}$, se obtiene la serie armónica, que se sabe es divergente.

Análisis siguiendo el proceso visto en la definición de Radio:

Como $R = \dfrac{1}{L} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ resulta:

$$R = \frac{1}{L} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2n}{n}}{\frac{2n+1}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{2n}\right| = \frac{1}{2}.$$ Que es el resultado ya obtenido.

Ejemplo 3: Determinar el intervalo de convergencia de la serie $x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots$

Se aplica el criterio de D'Alembert:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\right||\,x\,| = 0 < 1$$

Por lo que la serie converge para todo valor de *x*.

Incluso se puede verificar: $R = \dfrac{1}{L} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$ que confirma que el radio de convergencia es infinito, es decir converge para todo *x*.

Observación:

Si la serie es convergente es necesario que su término general tienda a cero cuando *n* tiende a infinito, es decir: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{n!} = 0$. Entonces se puede asegurar que la función factorial crece más rápidamente que la función potencial.

Ejemplo 4: La serie $1 + x + (2x)^2 + (3x)^3 + \cdots + (nx)^n + \cdots$

Se aplica el criterio de Cauchy: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(n\cdot x)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} n\cdot x$ este límite es infinito para todo x excepto para $x = 0$, único valor para el que la serie es convergente. Entonces el radio de convergencia es 0. Y no se habla de intervalo de convergencia, sino de *convergencia puntual*.

7.2.14 – Series de potencias de (x-a)

Una serie de funciones de la forma: $a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots$

se llama también *serie de potencias*, y las constantes $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots$ se llaman *coeficientes de la serie*.

Cuando $a = 0$ se obtiene una serie de potencias de *x*, que es el caso particular de la serie que se estudió en el apartado anterior.

Para determinar el dominio de convergencia se hace $x - a = X$ con lo que la serie se transforma:

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n + \cdots$$

Si esta última serie converge para $-R < X < R$, la serie de potencias de *(x-a)* converge en $-R < x - a < R \quad \Rightarrow \quad a - R < x < a + R$, definiendo un intervalo de convergencia centrado en *a*.

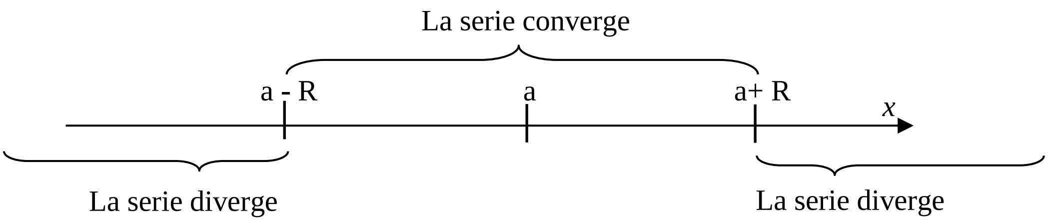


Figura 7.15

Todas las propiedades de la serie de potencias de *x* en el interior del intervalo de convergencia $(-R\ ,\ R)$ se conservan para la serie de potencias de *(x - a)* en el interior del intervalo $(a-R\ ,\ a+R)$.

Ejemplo 1: Hallar el dominio de convergencia de la serie

$$(x-2) + (x-2)^2 + (x-2)^3 + \cdots + (x-2)^n + \cdots$$

Haciendo $x - 2 = X$ se obtiene la serie $X + X^2 + X^3 + \cdots + X^n + \cdots$

Que ya se demostró que es convergente para $-1 < X < 1$ lo que implica que la serie de potencias de $(x-2)$ converge en $1 < x < 3$.

7.2.15 – Series de Taylor y Mc Laurin

Se desarrolla una metodología general para hallar series de potencias para una función con derivadas de todo orden. Los matemáticos más asociados a la representación de funciones como series de potencias son Brook Taylor (1685-1731) y Colin McLaurin (1698-1746).

En el tema sobre aplicaciones de la derivada se tuvo oportunidad de demostrar que para una función *f(x)*, derivable hasta el orden (n+1) inclusive, en un entorno del punto $x = a$, es válida la fórmula:

$$\boxed{f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x)} \quad \textbf{(1)}$$

Donde el término complementario, si se toma el de Lagrange, es:

$$\boxed{R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \qquad ; \qquad \xi = a + \theta(x-a) \quad \text{con} \quad 0 < \theta < 1}$$

Si la función admite infinitas derivadas no nulas en el entorno de $x = a$, entonces n puede ser tan grande como se quiera. Bajo esta condición, puede suponerse que en el intervalo considerado el término complementario R_n tiende a cero cuando n tiende a infinito. Entonces, tomando límites en la formula **(1)** se obtiene una serie infinita llamada ***Serie de Taylor***.

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \cdots \quad \textbf{(2)}$$

Esta igualdad solo se verifica cuando $R \to 0$ para $n \to \infty$. En este caso la serie **(2)** converge y su suma es igual a la función dada.

En efecto: $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$

Como por hipótesis: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ Resulta: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} P_n(x)$

Pero $P_n(x)$ es la n-sima suma parcial de la serie **(2)**, su límite es igual a la suma de la serie y entonces:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \cdots$$

Queda claro que la serie de Taylor representa la función dada solo cuando $R_n(x) \to 0$. Si $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) \neq 0$, entonces la serie no representa la función aunque pueda converger hacia otra función.

Si en la serie de Taylor es $a = 0$, se obtiene la ***Serie de Mc Laurin*** como caso particular de aquella.

$$f(x) = f(0) + x\, f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \cdots$$

Ejemplo 1: Desarrollo de la función $f(x) = sen(x)$ por la serie de Mc Laurin.

$$f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x = \operatorname{sen}\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f'''(0) = -1$$

$$f^{IV}(x) = \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f^{IV}(0) = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x) = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x)$$

$$R_{2n}(x) = \frac{x^{2n}}{(2n)!}\operatorname{sen}\left(\xi + 2n\frac{\pi}{2}\right) \text{para } 0 < \xi < x$$

y como $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 0$ para todo *x*, por ser $\operatorname{sen}\left(\xi + 2n\frac{\pi}{2}\right)$ un valor acotado es $\lim\limits_{n\to\infty} R_{2n}(x) = 0$. Por lo tanto:

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

Calcular sen10º con error inferior a 10^{-5}.

$$10^o = \frac{\pi}{18} \text{ radianes} = 0{,}174533$$

$$\operatorname{sen}10^o = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 + \cdots$$

Limitando el desarrollo a los dos primeros términos

$$\operatorname{sen}10^o = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3$$

El error δ en valor absoluto es menor que el primero de los términos suprimidos

$$\delta < \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 < \frac{1}{120}(0{,}2)^5 < 4\times 10^{-6}$$

Si se calcula cada sumando con 6 cifras, es $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{18} = 0{,}173647$ con error menor de 4×10^{-6}, con ello se puede asegurar que la cuarta cifra es exacta.

$$\boldsymbol{f(x) = x - 1.\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}}$$

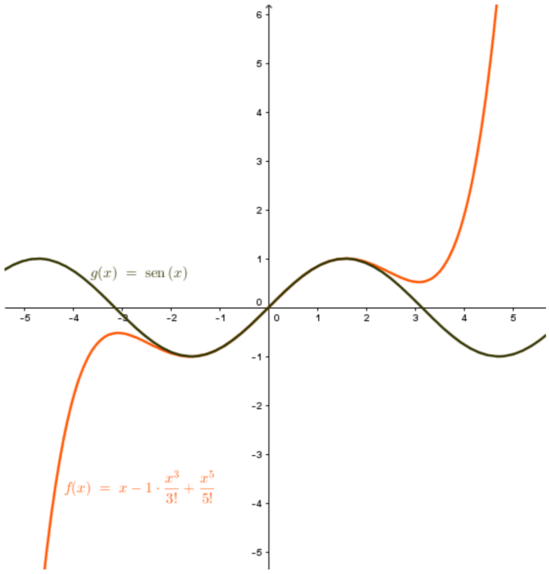


Figura 7.16

Ejemplo 2: Desarrollo de $f(x) = e^x$ en serie de Mc Laurin

$$f(x) = e^x \Rightarrow f(0) = 1$$
$$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = 1$$
$$f''(x) = e^x \Rightarrow f''(0) = 1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

Donde $\quad R_n(x) = e^{\xi}\,\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad$ para $\quad 0 < \xi < x$

$\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para todo x y por lo tanto

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Serie que converge para todo x y por lo tanto representa el valor de e^x.

Ejemplo 3: Desarrollo de la función coseno por la serie de Mc Laurin

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f(0) = 1$$
$$f'(x) = -\operatorname{sen} x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f'(0) = 0$$
$$f''(x) = -\cos x = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f''(0) = -1$$
$$f'''(x) = \operatorname{sen} x = \cos\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f'''(0) = 0$$
$$f^{IV}(x) = \cos x = \cos\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f^{IV}(0) = 1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Por lo que:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + R_{2n-1}(x)$$

Donde $\left|R_{2n-1}(x)\right| = \left|\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right| \left|\cos(0 + \theta x)\right| \to 0$ cuando $n \to \infty$ para todo *x*. Por lo que la función coseno puede ser representada por la serie

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$