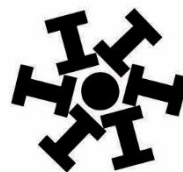




MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACIÓN
Universidad Nacional de San Juan



FACULTAD DE INGENIERÍA

Departamento de Matemática

Cátedra: CÁLCULO I – ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Autoría: Equipo de Cátedra - 2023

GUÍA DE EJERCICIOS TEMA 7

SUCESIONES Y SERIES

Sucesiones

Ejercicio 1: Dada la fórmula explícita para el término general de la sucesión a_n , escribir los primeros cuatro términos de la sucesión.

1.1. $a_n = \frac{2n}{n+1}$

Solución: $a_1 = \frac{2 \cdot 1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$, $a_2 = \frac{2 \cdot 2}{2+1} = \frac{4}{3}$, $a_3 = \frac{3 \cdot 1}{3+1} = \frac{3}{4}$, $a_4 = \frac{4 \cdot 1}{4+1} = \frac{4}{5}$

1.2. $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{n^2-2} \Rightarrow \dots\dots\dots$

1.3. $a_n = \frac{2^n}{n \cdot 3^n} \Rightarrow \dots\dots\dots$

1.4. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow \dots\dots\dots$

1.5. $a_n = \frac{n^2}{2^{n-1}} \Rightarrow \dots\dots\dots$

Ejercicio 2: Para cada una de las siguientes sucesiones:

- obtener la gráfica a partir de sus primeros seis términos
- calcular el límite
- de acuerdo con lo obtenido, decidir:
 - si es creciente, decreciente, o ninguna de ellas y verificarlo analíticamente.
 - acotada o no
 - convergente, divergente u oscilante.

2.1 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^n$

Solución:

Primeros términos: $a_1 = \frac{5}{2}$; $a_2 = \frac{17}{4}$; $a_3 = \frac{65}{8}$; $a_4 = \frac{257}{16}$; $a_5 = \frac{1025}{32}$; $a_6 = \frac{4097}{64}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = 0 + \infty = \infty$$

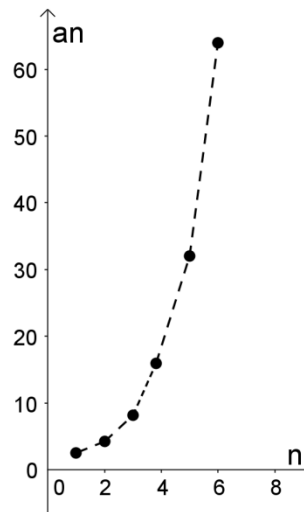
El valor del límite indica que la sucesión es

DIVERGENTE.

De la observación de la gráfica puede inferirse que la sucesión es **CRECIENTE**. Verificando analíticamente:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &> 0 \\ a_n &< a_{n+1} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^n &< \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 2^{n+1} \\ \frac{1 + 2^{2n}}{2^n} &< \frac{1 + 2^{2n+2}}{2^{n+1}} \\ (1 + 2^{2n})2 &< 1 + 2^{2n+2} \\ 2 + 2^{2n+1} &< 1 + 2^{2n+2} \\ 2 - 1 &< 2^{2n+2} - 2^{2n+1} \\ 2 - 1 &< 2^{2n} 2^2 - 2^{2n} 2 \\ 2 - 1 &< 2^{2n} (2) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} < 2^{2n} \text{ con lo que queda verificado}$$



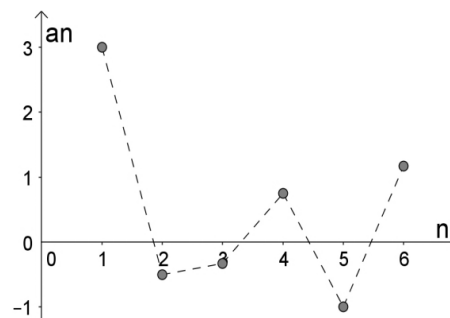
Por las características obtenidas, la sucesión es **NO ACOTADA**, ya que no existe un $M \in \mathbb{R}$, tal que $|a_n| < M$ para todo n .

2.2 $a_n = (-1)^n \frac{(2n-5)}{n}$

Solución:

Primeros términos: $a_1 = 3; a_2 = -\frac{1}{2}; a_3 = -\frac{1}{3}; a_4 = \frac{3}{4}; a_5 = -1; a_6 = \frac{7}{6}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{(2n-5)}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-5}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n}{n} - \frac{5}{n}}{\frac{n}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{5}{n}\right) = \pm 2 \rightarrow \nexists \end{aligned}$$



El límite no existe, por ello la sucesión es **OSCILANTE**.

El término $(-1)^n$ hace que el comportamiento de la sucesión alterne su comportamiento por tanto se puede decir que **NO ES CRECIENTE NI DECRECIENTE**. De hecho si se observa el término $(2n-5)/n$ se ve que para $n > 3$ siempre es positivo, ello hace que para $n > 3$ el valor de la sucesión alterne de signo de positivo a negativo y viceversa.

De lo determinado anteriormente se sabe que la sucesión oscilará entre dos valores $(-2 \text{ y } 3)$ por lo que es una sucesión **ACOTADA**.

Resolver:

2.3 $a_n = \frac{4}{n+8}$

2.4 $a_n = \frac{3n!}{(n-1)!}$

2.5 $a_n = 3 + \frac{3n}{2-n^2}$

2.6 $a_n = (-1)^{n+1} \frac{3n^2-2n}{n+3}$

2.7 $a_n = \frac{3+n}{2n+4}$

2.8 $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + 1$

2.9 $a_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$

Ejercicio 3: Complete las siguientes sentencias de modo que resulten correctas:

- a) Si el límite de una sucesión $\{a_n\}$ es finito entonces la sucesión es
- b) Una sucesión $\{a_n\}$ es acotada si se puede encontrar un valor real positivo N tal que
- c) En una sucesión convergente, a medida que n aumenta, los elementos tienden a

- d) Toda sucesión creciente acotada necesariamente es
- e) La sucesión $\{a_n\}$ es creciente si para todo n se verifica que
- f) Si el $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ entonces la sucesión $\{a_n\}$ es

Ejercicio 4: Dada las siguientes sentencias, indique, para cada una, si son verdaderas o falsas. En caso de que sea falsa, reescriba para que sea verdadera.

- a) Una sucesión monótona decreciente necesariamente es convergente. (___)
- b) En una sucesión convergente, puede verificarse que a medida que n crece los valores de esta estén cada vez más separados. (___)
- c) Toda sucesión acotada es convergente. (___)
- d) Toda sucesión convergente es acotada. (___)
- e) Una sucesión alternada siempre es oscilante. (___)
- f) Una sucesión puede converger a dos límites distintos. (___)
- g) Toda sucesión monótona no acotada es divergente. (___)

Ejercicio 5: Marque la única respuesta correcta:

- a) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ y b_n es acotada, entonces la sucesión $(a_n + b_n)$
☐ oscila ☐ diverge ☐ está acotada ☐ no puede asegurarse nada
- b) Si la sucesión $\{a_n\}$ converge a 0 y la sucesión $\{b_n\}$ converge a 2, entonces la sucesión $\{c_n\} = \{a_n + b_n\}$:
☐ es divergente ☐ converge a 0 ☐ es convergente ☐ no existe

Ejercicio 6: Sabiendo que la sucesión $a_n = \frac{n}{n+2}$ converge a 1, diga si son verdaderas o falsas cada una de las siguientes afirmaciones:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$. (___)
- b) $a_n > 0,9$ para casi todo n . (___)

CÁLCULO I – ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Guía de Ejercicios TEMA 7

- c) Existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_0} = 1$. (___)
- d) La sucesión está acotada. (___)

Series

1. Introducción.

a) “Aquiles y la tortuga”



La paradoja de Aquiles y la tortuga consiste en una carrera imaginaria. Uno de los contrincantes (Aquiles) era el más hábil de los guerreros aqueos, y vencedor de mil batallas. Era un superhombre casi invencible, y apodado “el de los pies ligeros”. El otro contrincante (la tortuga) es un ser por todos conocido, de proverbial lentitud. Dado que Aquiles es mucho más rápido que la tortuga (supuestamente) antes de empezar decide darle algunos metros ventaja, y tras dárselo, se inicia la carrera.

Rápidamente, Aquiles atraviesa ese estadio de ventaja hasta llegar al punto en el que *estaba* la tortuga. Ésta, de un insospechado espíritu competitivo, se había desplazado unos cuantos pasos hacia adelante. Así que Aquiles, atónito pero confiado en su enorme poderío físico, decide cruzar ese puñado de pasos, hasta llegar de nuevo a donde *estaba* la tortuga. De nuevo ella ¡se ha vuelto a mover! Se ve que la tortuga no quiere perder y Aquiles de nuevo, con renovados bríos, recorre velozmente esos centímetros que le separan del punto donde *estaba* la tortuga, la cual de nuevo... ¿se lo imaginan? ¡Efectivamente! La encontramos *un poquito más adelante...*

Así podíamos seguir hasta el infinito, y que Aquiles jamás alcanzará a la tortuga. Y por tanto cuando vemos a un Aquiles alcanzando a una tortuga es simplemente una ilusión.

¿En dónde está el error de la paradoja? Con los conocimientos que tenemos actualmente es fácil dar respuesta: **una suma de infinitos términos puede dar un resultado finito.**

b) Uso de los criterios de convergencia.

Supongamos que salimos de la facultad después de la clase de Cálculo I y queremos ir a tomar algo al dique. ¿En qué nos vamos? Sin duda hay muchas respuestas.

Alguien podría decir de ir a pie. ¿Qué respondería el resto? Probablemente que es una locura...pero ¿no es válida la opción? La respuesta más obvia sería que sí pero que hay formas más sencillas de ir, que insumen menos tiempo y esfuerzo.

En la resolución de series pasa exactamente lo mismo. Debemos probar las opciones de que disponemos, avanzando con criterios de mayor complejidad a medida que los más sencillos no dan resultados.

2. Uso de la condición necesaria de convergencia de una serie

La condición necesaria se puede emplear... ¡Siempre! Y se observan dos resultados:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0 \rightarrow$ La serie es divergente
- $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \rightarrow$ *No puede asegurarse nada*

Ejercicio 1: Aplique la condición necesaria para determinar la convergencia de estas series. Si la misma no responde deberá resolver el ejercicio al final de la guía, con el criterio que considere adecuado.

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2 + \frac{1}{n}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2 + \frac{1}{n}} = \infty \neq 0 \rightarrow$ La serie es divergente
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n} = 1 \neq 0 \rightarrow$ La serie es divergente
- c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 \rightarrow$ *no puede asegurarse carácter*
- d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0 \rightarrow$ La serie es divergente

Resolver:

- e). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2 + \frac{1}{n}}$
- f). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)!}$
- g). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1 - e^{\frac{1}{n}}}$
- h). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{1+n}$
- i). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$
- j). $\sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}(\pi n)$

3. Serie Geométrica

Las series del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n$ se denominan series geométricas. La convergencia de la serie depende exclusivamente del valor de q .

- Si $q < 1$, la serie será convergente, y su suma será $S = \frac{a}{1-q}$
- Si $q \geq 1$, la serie será divergente.

¡Atención! La serie presentada tiene como término inicial el valor a . ¿Cómo proceder entonces en otros casos?

La respuesta es sencilla si se aplica el teorema que dice que, **si a una serie se le suprimen un número finito de términos, no se altera la convergencia**.

Ejercicio 2: Determine el carácter de las siguientes series

a)
$$\sum_{n=0}^{\infty} 3 \cdot 2^{n+1}$$

Solución:

La serie se puede expresar de la siguiente forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3 \cdot 2^{n+1} = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + 3 \cdot 2^{n+1} + \dots [1]$$

Si se compara con la serie auxiliar:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3 \cdot 2^n = 3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + 3 \cdot 2^n + \dots [2]$$

Se observa que la serie [2] difiere de la [1] en un solo término. Luego, si la serie [2] es divergente puesto que su razón $q = 2 > 1$, entonces la serie original [1] también será divergente.

b)
$$\sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n+2}$$

Solución:

La serie se puede expresar de la siguiente forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n+2} = 4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 + 4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4 + \dots + 4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n+2} + \dots [3]$$

Si se compara con la serie auxiliar:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n = 4 + 4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) + 4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \dots + 4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n + \dots [4]$$

$$S_{[4]} = 4 + 4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) + S_{[3]}$$

Finalmente:

$$S_{[4]} = 4 + 4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) + S_{[3]} = 5$$

$$S_{[3]} = \frac{1}{5}$$

Otra forma de resolver el ejercicio es reescribir a la serie [3] para que cumpla con la forma general de las series geométricas:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{25} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

Entonces $a = 4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2$ y la razón es $q = \frac{1}{5}$. Con ello la suma será:

$$S = \frac{4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2}{1 - q} = \frac{1}{5}$$

Claramente se llega al mismo resultado.

Ejercicio 3: Para las siguientes series, determine su convergencia e indique si es posible el valor de su suma.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot 5^n$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n$

d) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$

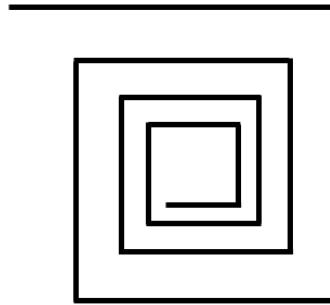
e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

f) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 3^n \right)$

g) $\sum_{n=4}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4} \right)$

h) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^{n+4}$

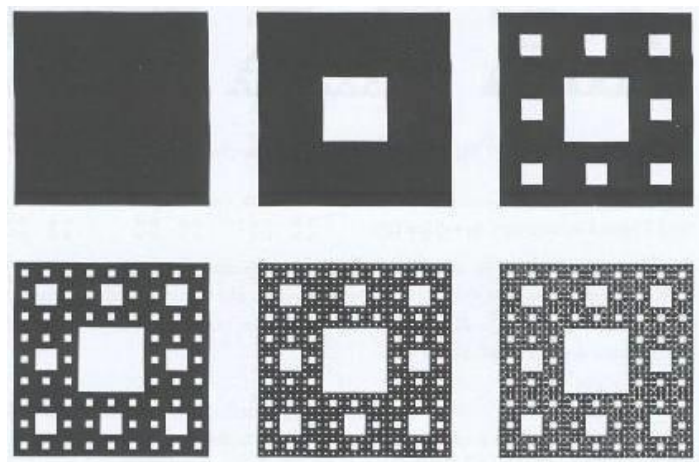
Ejercicio 4: Se desea construir una espiral cuadrada de alambre, donde cada lado es igual al 90 % del lado anterior. De la forma siguiente:



Si el lado inicial de la espiral es de 5 metros, y se repite el proceso un número infinito de veces, ¿cuánto alambre será necesario?

Ejercicio 5: Repetir el ejercicio anterior, pero suponiendo que en cada paso el lado de la espiral es del 105 % del lado inicial.

Ejercicio 6: DESAFÍO: La alfombra de Sierpinsky es una construcción que se hace de la siguiente manera. Se toma un cuadrado de lado unitario, se divide en nueve cuadrados iguales y se saca el del centro. El mismo proceso se repite en cada cuadrado restante, un número infinito de veces, como muestra la figura:



Demostrar que luego de repetir el proceso un número infinito de veces, al área de la alfombra de Sierpinsky es cero.

Solución:

En la siguiente tabla auxiliar se coloca el valor del área en cada paso, y se obtiene la expresión genérica del área en el paso n.

Paso	Área que se elimina	Área remanente
0	0	1
1	Un cuadrado de lado 1/3	$1 - 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - 1 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)$

CÁLCULO I – ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Guía de Ejercicios TEMA 7

2	8 cuadrados de lado igual a un tercio del cuadro remanente (un tercio de un tercio), es decir $1/9$.	$1 - 1\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 8\left(\frac{1}{9}\right)^2 = 1 - 1\left(\frac{1}{9}\right) - 8\left(\frac{1}{9}\right)^2$
3	64 cuadrados de lado igual a un tercio del cuadro remanente, es decir $1/27$.	$1 - 1\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 8\left(\frac{1}{9}\right)^2 - 64\left(\frac{1}{27}\right)^2$ $= 1 - 1 \cdot \left(\frac{1}{9}\right) - 8 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 - 8^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3$
...	...	...
n	De la observación de las expresiones anteriores se puede obtener la forma general del área remanente en el paso n	$1 - 1\left(\frac{1}{9}\right) - 8\left(\frac{1}{9}\right)^2 - 8^2\left(\frac{1}{9}\right)^3 - \dots - 8^{n-1}\left(\frac{1}{9}\right)^n$

La expresión del área en el paso n es entonces:

$$A_n = 1 - 1 \cdot \left(\frac{1}{9}\right) - 8 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 - 8^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 - \dots - 8^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n$$

$$A_n = 1 - \sum_1^n 8^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n = 1 - \sum_1^n 8^n \cdot 8^{-1} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n = 1 - \sum_1^n \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n$$

El área de la carpeta (A), luego de repetir el proceso infinitas veces, será entonces:

$$A = 1 - \sum_1^\infty \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n$$

El área está asociada a una serie geométrica. Claramente el valor de su razón indica que la serie es convergente:

$$q = 8/9 < 1$$

Para encontrar el valor de a se debe obtener el primer valor de la serie, que se da cuando $n=1$, entonces $a = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^1 = \frac{1}{9}$. La suma de la serie y el área de la carpeta es:

$$A = 1 - \sum_1^\infty \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n = 1 - \left(\frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{8}{9}}\right) = 1 - \left(\frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{9}}\right) = 1 - 1 = 0$$

4. Serie Armónica. Serie p.

La serie p es de la forma: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. La convergencia de esta depende del valor de p:

- Si $p > 1$, la serie será convergente.
- Si $p \leq 1$, la serie será divergente.

La serie armónica es el caso particular cuando $p = 1$, y es divergente. Es un buen contraejemplo de la condición necesaria de convergencia.

Ejercicio 7: Para las siguientes series, determinar si son convergentes o divergentes.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+4)^{-2}$

Solución:

La serie puede acomodarse como: $\sum_{n=1}^{\infty} (n+4)^{-2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)^2} = \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \dots$

Si se considera la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \dots$

Se observa que la serie dada es el resultado de suprimir un número finito de términos de la serie considerada, por lo que el comportamiento de la segunda dará lugar al comportamiento de la primera.

Aplicando el criterio de la serie p a la nueva serie, se tiene: $p = 2 > 1$

Por lo tanto: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente

En conclusión: $\sum_{n=1}^{\infty} (n+4)^{-2}$ es convergente

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+5} + \frac{1}{n^2} \right)$

Solución:

La serie puede acomodarse como: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+5} + \frac{1}{n^2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+5} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Resultando una suma de dos series. Se analiza cada una por separado y luego se aplican los teoremas de álgebra de series.

Si se considera la serie del segundo sumando: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$

Aplicando el criterio de la serie p a la nueva serie, se tiene: $p = 2 > 1$

Por lo tanto: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente

Si se considera la serie del primer sumando: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$

Se observa que la serie dada es el resultado de suprimir un número finito de términos de la serie armónica, por lo que el comportamiento de esta serie será divergente como lo es la serie armónica.

Entonces la serie a analizar es la suma de una serie convergente y una divergente

En conclusión: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+5} + \frac{1}{n^2} \right)$ es divergente

Ejercicio 8: Para las siguientes series, determinar si son convergentes o divergentes.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n}}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n} \right)^3$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6}{n^3} + \frac{3}{n^6} \right)$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\left(\frac{3}{n} \right)^3}$

5. Criterio general de la Integral.

Ejercicio 9: Demuestre, aplicando el criterio de la integral, que serie armónica es divergente.

Ejercicio 10: Aplique el criterio de la integral para verificar la convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{kn + b} \quad \text{con } k, b \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 11: Determinar la convergencia de las siguientes series mediante el criterio de la integral:

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$$

Solución;

Se elije como función asociada: $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

Entonces, aplicando el criterio se evalúa la integral: $\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2 + 1} dx$

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{x}{x^2 + 1} dx &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{x}{x^2 + 1} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_1^a \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_1^a \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln(a^2 + 1) - \left(\frac{1}{2} \ln(1^2 + 1) \right) = \infty \text{ diverge} \end{aligned}$$

Por lo tanto: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$ es divergente

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Solución:

Se elije como función asociada: $f(x) = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}$

Entonces, aplicando el criterio se evalúa la integral: $\int_1^{\infty} 2^{-x} dx$

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} 2^{-x} dx &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a 2^{-x} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} -\frac{1}{\ln 2} \int_1^a 2^{-x} \ln 2 (-1) dx = \lim_{a \rightarrow \infty} -\frac{1}{\ln 2} 2^{-x} \Big|_1^a \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} -\frac{1}{\ln 2} 2^{-a} - \left(-\frac{1}{\ln 2} 2^{-1} \right) = 0 + \frac{1}{2 \cdot \ln 2} \rightarrow \text{n}^\circ \text{ finito} \rightarrow \text{converge} \end{aligned}$$

Por lo tanto: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es convergente

Resolver:

c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2}$$

d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

f)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$$

g)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$$

h)
$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$$

i)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cos^2 x}$$

j)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n^2 + 3)^2}$$

6. Criterio de D'Alembert o del cociente.

Se basa en estudiar el límite del cociente del (n+1)-ésimo y el n-ésimo término, es decir $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$. La convergencia de la serie dependerá entonces del valor de dicho límite.

- Si $L < 1$, la serie será Convergente.
- Si $L > 1$, la serie será Divergente.
- Si $L = 1$, el criterio no da respuesta.

Ejercicio 12: Determinar si las siguientes series son convergentes o divergentes aplicando el criterio de D'Alembert.

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)}{(4n-3)}$$

Solución:

Se obtiene los dos términos sucesivos: $U_n = \frac{3n-1}{4n-3}$ $U_{n+1} = \frac{3(n+1)-1}{4(n+1)-3}$

Entonces, aplicando el criterio se evalúa el límite: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3(n+1)-1}{4(n+1)-3}}{\frac{3n-1}{4n-3}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3(n+1)-1}{4(n+1)-3}}{\frac{3n-1}{4n-3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n+2}{4n+1}}{\frac{3n-1}{4n-3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+2)(4n-3)}{(3n-1)(4n+1)} \stackrel{BL'H}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(4n-3) + 4(3n+2)}{3(4n+1) + 4(3n-1)}$$

CÁLCULO I – ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Guía de Ejercicios TEMA 7

$$\underset{BL'H}{\overset{\infty}{\rightleftharpoons}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 4 + 4 \cdot 3}{3 \cdot 4 + 4 \cdot 3} = 1 \rightarrow \text{El criterio no da respuesta}$$

Por lo tanto, si quiere evaluarse su carácter debe aplicarse otro criterio.

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$$

Se obtiene los dos términos sucesivos:
$$U_n = \frac{n^3}{3^n} U_{n+1} = \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}$$

Entonces, aplicando el criterio se evalúa el límite:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\frac{n^3}{3^n}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 \cdot 3^n}{n^3 \cdot 3^{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 \cdot 3^n}{n^3 \cdot 3^n \cdot 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{n^3 \cdot 3} \underset{BL'H}{\overset{\infty}{\rightleftharpoons}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(n+1)^2}{3n^2 \cdot 3} \underset{BL'H}{\overset{\infty}{\rightleftharpoons}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6(n+1)}{18 \cdot n} \underset{BL'H}{\overset{\infty}{\rightleftharpoons}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{18} = \frac{1}{3} < 1 \rightarrow \text{la serie es convergente} \end{aligned}$$

Resolver:

c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

h).
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{(\sqrt{2})^n}$$

d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

i).
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{3^n}$$

e).
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$$

j).
$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

f).
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$$

k).
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-3)^2 - 2}$$

g).
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(n+2)}$$

7. Criterio de Cauchy o de la raíz.

Se basa en estudiar el límite de la raíz n -ésima del n -ésimo término, es decir $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = L$

La convergencia de la serie dependerá entonces del valor de dicho límite.

- Si $L < 1$, la serie será Convergente.
- Si $L > 1$, la serie será Divergente.
- Si $L = 1$, el criterio no da respuesta.

Ejercicio 13: Determinar si las siguientes series son convergentes o divergentes aplicando el criterio de Cauchy.

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n$$

Solución:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n-1} \stackrel{BL'H}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

La serie es convergente

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{2n+1} \right)^n$$

c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n}{3n+1} \right)^n$$

d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{5n+2} \right)^{\frac{n}{2}}$$

e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}$$

f)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

g)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+2} \right)^n$$

8. Criterio de Raabe.

Se basa en estudiar el límite siguiente $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = L$

La convergencia de la serie dependerá entonces del valor de dicho límite.

- Si $L > 1$, la serie será Convergente.
- Si $L < 1$, la serie será Divergente.
- Si $L = 1$, el criterio no da respuesta.

Ejercicio 14: Determine si las siguientes series son convergentes o divergentes aplicando el criterio de Raabe.

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n+2)}$$

Solución:

$$u_n = \frac{(2n-1)}{(2n+2)} \quad u_{n+1} = \frac{(2(n+1)-1)}{(2(n+1)+2)} = \frac{2n+2-1}{2n+2+2} = \frac{2n+1}{2n+4}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{\frac{2n+1}{2n+2}}{\frac{2n+1}{2n+4}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{(2n+1)(2n+2)}{(2n-1)(2n+4)} \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{4n^2 + 6n + 2}{4n^2 + 6n - 4} \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{4n^2 + 6n - 4 - (4n^2 + 6n + 2)}{4n^2 + 6n - 4} \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{4n^2 + 6n - 4 - 4n^2 - 6n - 2}{4n^2 + 6n - 4} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{-6}{4n^2 + 6n - 4} \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-6n}{4n^2 + 6n - 4} \stackrel{BL'H}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-6}{8n + 6} = 0 < 1$$

La serie es divergente

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{(2n)!}$$

9. Criterio de Leibniz para series alternadas.

Las series alternadas son casos especiales de series de términos positivos y negativo, caracterizadas por la alternancia de signos de los términos de la serie.

Para el estudio de la serie alternada del tipo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots - u_n + \dots$$

El criterio de Leibniz establece que la serie será convergente si se cumplen dos condiciones:

- a) Los términos de la serie decrecen en valor absoluto: $|u_n| > |u_{n+1}|$
- b) El n-ésimo término tiende a cero cuando n tiende a infinito $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

Además de acuerdo a la convergencia de la serie de términos positivos asociada, $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$:

- Si es convergente, la serie alternada se dice **absolutamente convergente**.
- Si es divergente, la serie alternada se dice **condicionalmente convergente**.

Ejercicio 15: Para las siguientes series alternadas, determine si son convergentes o divergentes. En caso de ser convergente indique si es en forma absoluta o condicional.

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n+3}$$

Solución: $\checkmark \left| \frac{1}{n+3} \right| > \left| \frac{1}{n+4} \right|$

$$n+4 > n+3$$

Sí se cumple

$$\checkmark \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n+3} = 0$$

Sí se cumple

La serie es convergente

¿Es absolutamente o condicionalmente convergente?

Para analizar la serie positiva asociada se aplica criterio de la integral con la función $f(x) =$

$$\frac{1}{x+3}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x+3} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x+3} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(x+3) \Big|_1^b$$

$$= \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \ln(b+3) - \ln 4 \right) = \infty \rightarrow \text{La integral es divergente}$$

La serie de términos positivos es divergente, entonces:

La serie alternada es condicionalmente convergente

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^3}$$

d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$$

e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n}{4n-1}$$

f)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1}$$

g)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+4)}$$

h)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2^n}$$

i)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^n}{n!}$$

j)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{5}\right)^n$$

10. Series de potencias

Ejercicio 16: Calcular el radio de convergencia para las siguientes series. Para las marcadas con un asterisco (*) analizar la convergencia en los extremos del intervalo.

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} (*)$$

Solución:

Radio de convergencia.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}} \right| = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = |x| \cdot 1 < 1 \rightarrow |x| < 1$$

$$-1 < x < 1; \quad \boxed{R = 1}$$

Análisis de extremos.

Cuando $x=-1$ la serie queda:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Se verifica que:

1) $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

Luego la serie alternada es convergente.

Cuando $x=1$ la serie queda:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Que es la serie armónica que se sabe es divergente.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (nx)^n$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 5^n}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^n}{5^n} (*)$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (2x)^n (*)$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} (*)$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot x^n}{\sqrt{n}} (*)$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 + 1}$

Ejercicio 17: Desafío: Desarrollar las siguientes funciones como series de potencias (mediante el uso de series de Taylor o McLaurin)

a) $f(x) = \text{sen}(x)$

Se desarrollará por polinomio de McLaurin.

Grado	$f'(x)$	$f'(0)$
0	$f(x) = \text{sen}(x)$	$f(0) = 0$
1	$f'(x) = \cos(x)$	$f'(0) = 1$
2	$f''(x) = -\text{sen}(x)$	$f''(0) = 0$
3	$f'''(x) = -\cos(x)$	$f'''(0) = -1$
4	$f^{iv}(x) = \text{sen}(x)$	$f^{iv}(0) = 0$
...		...

Desarrollo de la serie:

$$f(x) = \text{sen}(x) = 0 + \frac{1 \cdot x}{1!} + \frac{0 \cdot x^2}{2!} + \frac{(-1) \cdot x^3}{3!} + \frac{0 \cdot x^4}{4!} + \frac{1 \cdot x^5}{5!} + \dots$$

Se coloca en notación de sumatoria:

$$f(x) = \text{sen}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

b) $f(x) = \cos(x)$

c) $f(x) = e^x$